

### § 5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

- 1) Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
- 2) Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к ним.
- 3) Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.
- 4) Уравнения в полных дифференциалах.
- 5) Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин.
- 6) Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.
- 7) Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
- 8) Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Линейное однородное дифференциальное уравнение, свойства его решений.
- 9) Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.
- 10) Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
- 11) Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
- 12) Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.
- 13) Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
- 14) Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).
- 15) Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).
- 16) Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.

### § 5.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

- 1) Пусть  $y_1$  — решение дифференциального уравнения  $L[y] = 0$ . Показать, что введение новой искомой функции  $u = y / y_1$  приводит к дифференциальному уравнению, допускающему понижение порядка.
- 2) Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки перегиба графиков решений уравнения  $y' = f(x, y)$ .
- 3) Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки графиков решений уравнения  $y' = f(x, y)$ , соответствующие максимумам и минимумам.  
Как отличить максимум от минимума?
- 4) Линейное дифференциальное уравнение останется линейным при замене независимой переменной  $x = \varphi(t)$ , где функция  $\varphi(t)$  произвольная, но дифференцируемая достаточное число раз. Доказать это утверждение для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
- 5) Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции

$$y = \alpha(x)z + \beta(x).$$

Здесь  $z$  — новая искомая функция  $\alpha(x)$ , и  $\beta(x)$  — произвольные, но достаточное число раз дифференцируемые функции.

- 6) Составить общее решение уравнения  $y' + p(x)y = 0$ , если известно ненулевое частное решение  $y_1$  этого

уравнения.

7) Показать, что произвольные дважды дифференцируемые функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  являются решениями линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

8) Составить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее  $y_1 = x, y_2 = x^2$ .

Показать, что функции  $x$  и  $x^2$  линейно независимы в интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

Убедиться в том, что определитель Вронского для этих функций равен нулю в точке  $x = 0$ . Почему это не противоречит необходимому условию линейной независимости системы решений линейного однородного дифференциального уравнения?

9) Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если известны три линейно-независимые частные его решения  $y_1, y_2, y_3$ ?

10) Доказать, что для того чтобы любое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяло условию  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

### § 5.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Задача 1.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде  $\psi(x, y) = C$ ).

1.  $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx.$

12.  $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0.$  13.

2.  $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$  3.

$2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx.$  14.

$\sqrt{4+y^2} dx - ydy = x^2 ydy.$  4.

$x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0.$  15.

$\sqrt{3+y^2} dx - ydy = x^2 ydy.$  5.

$(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0.$  16.

$6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx.$

$\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0.$

6.  $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0.$

17.  $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx.$  18.

7.  $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0.$  8.

$y \ln y + xy' = 0.$  19.

$y'y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$  9.

$(1 + e^x)y' = ye^x.$  20.

$6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx.$

$\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0.$  21.

10.  $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0.$

$6xdx - 2ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx.$

11.  $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0.$

22.  $y(1 + \ln y) + xy' = 0.$  23.

$(3 + e^x)yy' = e^x.$  24.

$\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0.$  25.

|   |     |                                      |     |
|---|-----|--------------------------------------|-----|
| $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$          | 26. | $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$      | 30. |
| $\sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0.$ |     | $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0.$ | 31. |
| 27. $(1 + e^x)yy' = e^x.$               | 28. | $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx.$  |     |
| $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0.$ | 29. |                                      |     |

**Задача 2.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

|   |     |   |     |
|---|-----|---|-----|
| 1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$ | 2.  | 16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$            | 17. |
| $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$      | 3.  | $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$   | 18. |
| $y' = \frac{x + y}{x - y}.$                   | 4.  | $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$    | 19. |
| $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$                 | 5.  | $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$    | 20. |
| $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$   | 6.  | $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$               | 21. |
| $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$     | 7.  | $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$   | 22. |
| $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}.$                 | 8.  | $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$    | 23. |
| $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$                | 9.  | $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$     | 24. |
| $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$   | 10. | $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$               | 25. |
| $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$     | 11. | $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$  | 26. |
| $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$      | 12. | $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$    | 27. |
| $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$                | 13. | $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$     | 28. |
| $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$    | 14. | $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$                | 29. |
| $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$     | 15. | $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$ | 30. |
| $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$    |     | $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$               | 31. |
|   |     | $y' = \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{2x^2 - 6xy}.$   |     |

**Задача 3.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$1. y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}.$$

$$2. y' = \frac{x+y-2}{2x-2}.$$

$$3. y' = \frac{3y-x-2}{3x+3}.$$

$$4. y' = \frac{2y-2}{x+y-2}.$$

$$5. y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}.$$

$$6. y' = \frac{2x+y-3}{x-1}.$$

$$7. y' = \frac{x+7y-8}{9x-y-8}.$$

$$8. y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}.$$

$$9. y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}.$$

$$10. y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}.$$

$$11. y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}.$$

$$12. y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}.$$

$$13. y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}.$$

$$14. y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}.$$

$$15. y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$$

$$16. y' = \frac{y-2x+3}{x-1}.$$

$$17. y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$$

$$18. y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}.$$

$$19. y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}.$$

$$20. y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}.$$

$$21. y' = \frac{x+y+2}{x+1}.$$

$$22. y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}.$$

$$23. y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}.$$

$$24. y' = \frac{y}{2x-2y-2}.$$

$$25. y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}.$$

$$26. y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$$

$$27. y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}.$$

$$28. y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}.$$

$$29. y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}.$$

$$30. y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$$

$$31. y' = \frac{y+2}{2x+y-4}.$$

**Задача 4.** Найти решение задачи Коши.

$$1. y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0.$$

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y(\pi/2) = 0.$$

$$3. y' - y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0.$$

$$4. y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, y(\pi/4) = \frac{1}{2}.$$

$$5. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}.$$

$$6. y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1.$$

2.

$$7. y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y(\pi/2) = 1.$$

$$8. y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$9. y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1.$$

$$10. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$11. y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, y(2) = 4.$$

$$12. y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, y(1) = e.$$

$$13. y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$$

$$14. y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4.$$

$$15. y' + \frac{2}{x}y = x^2, y(1) = -\frac{5}{6}.$$

$$16. y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$$

$$17. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, y(1) = 3.$$

$$18. y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1.$$

$$19. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1.$$

$$20. y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}.$$

$$21. y' - \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$22. y' + xy = -x^3, y(0) = 3.$$

$$23. y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, y(0) = 1.$$

$$24. y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1.$$

$$25. y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$26. y' - y \cos x = -\sin 2x, y(0) = 3.$$

$$27. y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$28. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$$

$$29. y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, y(0) = 0.$$

$$30. y' - y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1.$$

$$31. y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, y(1) = 1.$$

**Задача 5.** Решить задачу Коши.

$$1. y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0, y|_{x=e} = 2. \quad 2.$$

$$(y^4 e^y + 2x)y', y|_{x=0} = 1.$$

$$3. y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, y|_{x=1} = e. \quad 4.$$

$$2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, y|_{x=0} = 0. \quad 5.$$

$$(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y, y|_{x=1/4} = \pi/3. \quad 6.$$

$$(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y, y|_{x=\pi} = \pi/4. \quad 7.$$

$$e^{y^2} (dx - 2xy dy) = y dy, y|_{x=0} = 0. \quad 8.$$

$$(104y^3 - x)y' = 4y, y|_{x=8} = 1. \quad 9.$$

$$dx + (xy - y^3) dy = 0, y|_{x=-1} = 0. \quad 10.$$

$$(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y, y|_{x=16} = \pi/4.$$

$$11. 8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y|_{x=0} = 0. \quad 12.$$

$$(2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy, y|_{x=4} = e^2. \quad 13.$$

$$2(x + y^4)y' = y, y|_{x=-2} = -1. \quad 14.$$

$$y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, y|_{x=1/4} = 2.$$

$$15. 2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0, y|_{x=e} = 1. \quad 16.$$

- $(xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx = 0, y_{|x=-1/2} = 4.$  17.
- $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy, y_{|x=-1/2} = \pi/4.$
18.  $(y^2 + 2y - x)y' = 1, y_{|x=2} = 0.$  19.
- $2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0, y_{|x=-4} = 1.$  20.
- $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy, y_{|x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$  21.
- $2(\cos^2 y \cos 2y - x)y' = \sin 2y, y_{|x=3/2} = 5\pi/4.$  22.
- $chydx = (1 + xshy)dy, y_{|x=1} = \ln 2.$  23.
- $(13y^3 - x)y' = 4y, y_{|x=5} = 1.$  24.
- $y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy, y_{|x=\pi/8} = 2.$
25.  $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}, y_{|x=2} = 1.$  26.
- $(2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2 dx = 0, y_{|x=-1/2} = 1.$  27.
- $ydx + (2x - 2\sin^2 y - y \sin 2y)dy = 0, y_{|x=3/2} = \pi/4.$
28.  $2(y^3 - y + xy)dy = dx, y_{|x=-2} = 0.$  29.
- $(2y + xtgy - y^2tgy)dy = dx = 0, y_{|x=0} = \pi.$  30.
- $4y^2 dx + (x + e^{1/(2y)})dy = 0, y_{|x=e} = \frac{1}{2}.$  31.
- $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, y_{|x=-1} = 0.$

**Задача 6.** Найти решение задачи Коши.

1.  $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$  2.
- $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$  3.
- $2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$  4.
- $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, y(0) = 1.$  5.
- $xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1.$  6.
- $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$  7.
- $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$  8.
- $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1.$  9.
- $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$  10.
- $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$  11.

$$2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 12.$$

$$3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1. \quad 13.$$

$$2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1. \quad 14.$$

$$3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3. \quad 15.$$

$$y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}. \quad 16.$$

$$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad 17.$$

$$y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2}. \quad 18.$$

$$xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1. \quad 19.$$

$$2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2. \quad 20.$$

$$4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1. \quad 21.$$

$$8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}. \quad 22.$$

$$2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2. \quad 23.$$

$$y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1. \quad 24.$$

$$2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1. \quad 25.$$

$$y' - y = xy^2, y(0) = 1. \quad 26.$$

$$2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2. \quad 27.$$

$$y' + y = xy^2, y(0) = 1. \quad 28.$$

$$y' + 2y \operatorname{cthx} = y^2 \operatorname{chx}, y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}. \quad 29.$$

$$2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 2. \quad 30.$$

$$y' - y \operatorname{tg} x = -\left(\frac{2}{3}\right)y^4 \sin x, y(0) = 1. \quad 31.$$

$$xy' + y = xy^2, y(1) = 1.$$

**Задача 7.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$1. 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0. \quad 2.$$

$$(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0. \quad 3.$$

$$(3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0. \quad 4.$$

$$(2x - 1 - \frac{y}{x^2}) dx + (2x - \frac{1}{x}) dy = 0. \quad 5.$$

- $(y^2 + y \sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0.$  6.
- $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$  7.
- $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$
8.  $(\sin 2x - 2 \cos(x + y))dx - 2 \cos(x + y)dy = 0.$
9.  $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2 y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$  10.
- $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$  11.
- $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y\right) dy = 0.$  12.
- $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0.$
13.  $\frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$  14.
- $\frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$  15.
- $\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$  16.
- $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x} dy = 0.$  17.
- $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right)dy = 0.$
18.  $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} dy = 0.$  19.
- $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0.$  20.
- $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$  21.
- $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2 y)dy = 0.$  22.
- $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2 y - y)dy = 0.$  23.
- $(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x + y^2)dy = 0.$
24.  $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$
25.  $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

$$26. \left(1 + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right) dy = 0. \quad 27.$$

$$\frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 0. \quad 28.$$

$$2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0. \quad 29.$$

$$(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

$$30. xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0. \quad 31.$$

$$\frac{xdx + ydy + (xdy - ydx)}{x^2 + y^2} = 0.$$

**Задача 8.** Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку

$$1. y' = y - x^2, M(1,2).$$

$$yy' = -2x, M(0,5).$$

$$y' = 2 + y^2, M(1,2).$$

$$y' = \frac{2x}{3y}, M(1,1).$$

$$y' = (y-1)x, M\left(1, \frac{3}{2}\right).$$

$$yy' + x = 0, M(-2,-3).$$

$$y' = 3 + y^2, M(1,2).$$

$$xy' = 2y, M(2,3).$$

$$y'(x^2 + 2) = y, M(2,2).$$

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(2,1).$$

$$11. y' = y - x, M\left(\frac{9}{2}, 1\right).$$

$$y' = x^2 - y, M\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

$$y' = xy, M(0,-1).$$

$$y' = xy, M(0,1).$$

$$yy' = -\frac{x}{2}, M(0,1).$$

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

12.

13.

14.

15.

$$16. 2(y + y') = x + 3, M\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

$$17. y' = x + 2y, M(3,0). \quad 18.$$

$$xy' = 2y, M(1,3). \quad 19.$$

$$3yy' = x, M(-3,-2). \quad 20.$$

$$y' = y - x^2, M(-3,4). \quad 21.$$

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(-2,1).$$

$$22. y' = x^2 - y, M\left(2, \frac{3}{2}\right).$$

$$23. y' = y - x, M(2,1). \quad 24.$$

$$yy' = -x, M(2,3). \quad 25.$$

$$y' = y - x, M(4,2). \quad 26.$$

$$3yy' = x, M(1,1). \quad 27.$$

$$y' = x^2 - y, M(0,1). \quad 28.$$

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, M(1,3). \quad 29.$$

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(-2,-1).$$

$$30. y' = x(y-1), M\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

$$31. y' = x + 2y, M(1,2).$$

**Задача 9.** Найти линию, проходящую через точку  $M_0$  и обладающую тем свойством, что в любой ее точке  $M$  нормальный вектор  $\overline{MN}$  с концом на оси  $Oy$  имеет длину, равную  $a$ , и образует острый угол с положительным

направлением оси  $Oy$ .

- |                         |    |                        |    |
|-------------------------|----|------------------------|----|
| 1. $M_0(15,1), a = 25.$ | 2. | 4. $M_0(6,4), a = 10.$ | 5. |
| $M_0(12,2), a = 20.$    | 3. | $M_0(3,5), a = 5.$     |    |
| $M_0(9,3), a = 15.$     |    |                        |    |

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$ , если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой линии в отношении  $a : b$  (считая от оси  $Oy$ ).

- |                               |    |                                 |
|-------------------------------|----|---------------------------------|
| 6. $M_0(1,1), a : b = 1 : 2.$ | 7. | 9. $M_0(1,0), a : b = 3 : 2.$   |
| $M_0(-2,3), a : b = 1 : 3.$   |    | 10. $M_0(2,-1), a : b = 3 : 1.$ |
| 8. $M_0(0,1), a : b = 2 : 3.$ |    |                                 |

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$ , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью  $Oy$  делится на точке пересечения с осью абсцисс в отношении  $a : b$  (считая от оси  $Oy$ ).

- |                                 |                                |     |
|---------------------------------|--------------------------------|-----|
| 11. $M_0(2,-1), a : b = 1 : 1.$ | 14. $M_0(2,1), a : b = 1 : 2.$ | 15. |
| 12. $M_0(1,2), a : b = 2 : 1.$  | $M_0(1,-1), a : b = 1 : 3.$    |     |
| 13. $M_0(-1,1), a : b = 3 : 1.$ |                                |     |

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$ , если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении  $a : b$  (считая от оси  $Oy$ ).

- |                                |                                |     |
|--------------------------------|--------------------------------|-----|
|                                | 18. $M_0(1,3), a : b = 2 : 1.$ | 19. |
| 16. $M_0(1,2), a : b = 1 : 1.$ | $M_0(2,-3), a : b = 3 : 1.$    | 20. |
| 17. $M_0(2,1), a : b = 1 : 2.$ | $M_0(3,-1), a : b = 3 : 2.$    |     |

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$  и обладающую тем свойством, что в любой ее точке  $M$  касательный вектор  $\overline{MN}$  с концом на оси  $Ox$  имеет проекцию на ось  $Ox$ , обратно пропорциональную абсциссе точки  $M$ . Коэффициент пропорциональности равен  $a$ .

- |                                    |  |     |
|------------------------------------|--|-----|
| 21. $M_0(1, e), a = -\frac{1}{2}.$ | 24. $M_0\left(2, \frac{1}{e}\right), a = 2.$             | 22. |
| $M_0(2, e), a = -2.$               | 25. $M_0\left(1, \frac{1}{e^2}\right), a = \frac{1}{4}.$ | 23. |
| $M_0(1, \sqrt{e}), a = -1.$        |  |     |

Найти линию, проходящую через точку  $M_0$  и обладающую тем свойством, что в любой ее точке  $M$  касательный вектор  $\overline{MN}$  с концом на оси  $Oy$  имеет проекцию на ось  $Ox$ , равную  $a$ .

26.  $M_0(1,2), a = -1$ .

27.

29.  $M_0(1,3), a = -4$ .

$M_0(1,4), a = 2$ .

28.

30.  $M_0(1,6), a = 3$ .

31.

$M_0(1,5), a = -2$ .

$M_0(1,1), a = 1$ .

**Задача 10.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.  $y'''x \ln x = y''$ .

13.  $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$ .

24.  $(x+1)y''' + y'' = (x+1)$ .

2.  $xy''' + y'' = 1$ .

14.  $x^5y''' + x^4y'' = 1$ .

25.

$(1+\sin x)y''' = \cos x \cdot y''$ .

3.  $2xy''' = y''$ .

15.  $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$ .

26.  $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

4.  $xy''' + y'' = x+1$ .

16.  $xy''' + y'' + x = 0$ .

27.  $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$ .

5.  $tgxy'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$ .

17.  $thx \cdot y^{IV} = y'''$ .

28.  $cthx \cdot y'' + y' = chx$ .

6.  $x^2y'' + xy' = 1$ .

18.  $xy''' + y'' = \sqrt{x}$ .

29.  $x^4y'' + y' = chx$ .

7.  $y'''ctg2x + 2y'' = 0$ .

19.  $y'''tgx = y'' + 1$ .

30.  $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$ .

8.  $x^3y''' + x^2y'' = 1$ .

20.  $y'''tg5x = 5y''$ .

31.

$(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$ .

9.  $y'''tgx = 2y''$ .

21.  $y''' \cdot th7x = 7y''$ .

10.  $y'''cth2x = 2y''$ .

22.  $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$ .

11.  $x^4y'' + x^3y' = 1$ .

23.  $cthx \cdot y'' - y' + \frac{1}{chx} = 0$ .

12.  $xy''' + 2y'' = 0$ .

**Задача 11.** Найти решение задачи Коши.

1.  $4y^3y'' = y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = 1/(2\sqrt{2})$ .

2.  $y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8$ .

3.

$y^3y'' + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$ .

4.

$y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

5.  $y'' = 32\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 4$ .

6.  $y'' = 98y^3, y(1) = 1, y'(1) = 7$ .

7.

$y^3y'' + 49 = 0, y(3) = -7, y'(3) = -1$ .

8.

$4y^3y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

9.

- $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$  10.
- $y'' = 72 y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$  11.
- $y^3 y'' + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2.$  12.
- $y'' = 18 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 3.$  13.
- $4 y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$  14.
- $y'' = 50 y^3, y(3) = 1, y'(3) = 5.$  15.
- $y^3 y'' + 25 = 0, y(2) = -5, y'(2) = -1.$  16.
- $y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3.$  17.
- $y'' = 8 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 2.$  18.
- $y'' = 32 y^3, y(4) = 1, y'(4) = 4.$  19.
- $y^3 y'' + 16 = 0, y(1) = 2, y'(1) = 2.$  20.
- $y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4.$  21.
- $y'' = 50 \sin^3 y \cos y = y^4 - 1, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 5.$
22.  $y'' = 18 y^3, y(1) = 1, y'(1) = 3.$  23.
- $y^3 y'' + 9 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 3.$  24.
- $y^3 y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$  25.
- $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$  26.
- $y'' = 8 y^3, y(0) = 1, y'(0) = 2.$  27.
- $y^3 y'' + 4 = 0, y(0) = -1, y'(0) = -2.$  28.
- $y'' = 2 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 1.$  29.
- $y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$  30.
- $y'' = 2 y^3, y(-1) = 1, y'(-1) = 1.$  31.
- $y^3 y'' + 1 = 0, y(1) = -1, y'(1) = -1.$

**Задача 12.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

- |                                    |    |  |     |
|------------------------------------|----|--|-----|
| 1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$  | 2. | 6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x).$   |     |
| $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$          | 3. | 7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$ |     |
| $y''' - y' = x^2 + x.$             | 4. | 8. $y^{IV} - y^{IV} = 2x + 3.$           | 9.  |
| $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$ |    | $3 = 1 - x^2.$                           | 10. |
| 5. $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2.$   |    | $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$           | 11. |

- |   |     |   |     |
|---|-----|---|-----|
| $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$                  | 12. | $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$           | 23. |
| $y^{IV} + 4y''' + 4y'' + 2y' = x - x^2.$  |     | $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$          |     |
| 13. $7y''' - y'' = 12x.$                  | 14. | 24. $y^{IV} + y''' = x.$                | 25. |
| $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$          |     | $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$     |     |
| 15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$          |     | 26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$ |     |
| 16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$         |     | 27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2.$    |     |
| 17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$ |     | 28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$   |     |
| 18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$  |     | 29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$ |     |
| 19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$          |     | 30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6.$          | 31. |
| 20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$    |     | $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$    |     |
| 21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$            | 22. |   |     |

**Задача 13.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$ | 17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x.$       |
| 2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$           | 18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}.$        |
| 3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$      | 19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}.$ |
| 4. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$         | 20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x.$                |
| 5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$       | 21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32).$ |
| 6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$      | 22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x.$                 |
| 7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x.$            | 23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x.$    |
| 8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$       | 24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x.$      |
| 9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x.$         | 25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x.$    |
| 10. $y''' - 3y'' - 2y = -4xe^x.$                | 26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}.$       |
| 11. $y''' - 3y'' + 2y = (4x + 9)e^{2x}.$        | 27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x.$           |
| 12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x.$   | 28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x.$         |
| 13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$       | 29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x.$     |
| 14. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x.$           | 30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}.$        |
| 15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x.$         | 31. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}.$       |
| 16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x.$      |  |

**Задача 14.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.  $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$ .
2.  $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$ .
3.  $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$ .
4.  $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$ .
5.  $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$ .
6.  $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$ .
7.  $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$ .
8.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$ .
9.  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$ .
10.  $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$ .
11.  $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$ .
12.  $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$ .
13.  $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$ .
14.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$ .
15.  $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$ .
16.  $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$ .
17.  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$ .
18.  $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$ .
19.  $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$ .
20.  $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$ .
21.  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$ .
22.  $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$ .
23.  $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$ .
24.  $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$ .
25.  $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$ .
26.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$ .
27.  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$ .
28.  $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$ .
29.  $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$ .
30.  $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$ .
31.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$ .

**Задача 15.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.  $y'' - 2y' = 2ch2x$ .
2.  $y'' - y' = ch2x$ .
14.  $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$ .
3.  $y'' - y' = 2e^x + \cos x$ .
4.  $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$ .
5.  $y'' - 3y' = 2ch3x$ .
15.  $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$ .
6.  $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$ .
16.  $y'' + 2y' = 2sh2x$ .
17.  $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$ .
7.  $y'' - 4y' = 16ch4x$ .
8.  $y'' + 3y' = 2sh3x$ .
18.  $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$ .
9.  $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$ .
19.  $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$ .
20.  $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$ .
10.  $y'' - 5y' = 50ch5x$ .
11.  $y'' + 4y' = 16sh4x$ .
21.  $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$ .
12.  $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$ .
22.  $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$ .
23.  $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$ .
24.  $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$ .

25.  $y'' + 5y' = 50sh5x$ .  
 $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$ .
26.  $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$ .  
 $30y''' - 81y' = 162 \cdot e^{9x} + 81\sin 9x$ .  
 $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$ .
27.  $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$ .
28.  $y'' + y' = 2shx$ .
- 29.
- 31.

**Задача 16.** Найти решение задачи Коши.

1.  $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 0$ . 2.

$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$ ,  $y(0) = \ln 4$ ,  $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$ .

3.  $y'' + 4y = 8ctg 2x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$ . 4.

$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}$ ,  $y(0) = 1 + 2\ln 2$ ,  $y'(0) = 6\ln 2$ .

5.  $y'' + -9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

6.  $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$ ,  $y\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ,  $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$ . 7.

$y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ . 8.

$y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$ ,  $y(0) = 4\ln 4$ ,  $y'(0) = 4(3\ln 4 - 1)$ .

9.  $y'' + y = 4ctgx$ ,  $y(\pi/2) = 4$ ,  $y'(\pi/2) = 4$ . 10.

$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}$ ,  $y(0) = 1 + 3\ln 3$ ,  $y'(0) = 10\ln 3$ .

11.  $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ . 12.

$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$ ,  $y(\pi/6) = 4$ ,  $y'(\pi/6) = 3\pi/2$ .

13.  $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . 14.

$y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$ ,  $y(0) = \ln 27$ ,  $y'(0) = \ln 9 - 1$ . 15.

$y'' + 4y = 4ctg 2x$ ,  $y(\pi/4) = 3$ ,  $y'(\pi/4) = 2$ . 16.

$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}$ ,  $y(0) = 1 + 8\ln 2$ ,  $y'(0) = 14\ln 2$ .

17.  $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

$$18. y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}, y(\pi/8) = 3, y'(\pi/8) = 2\pi.$$

$$19. y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, y(0) = 3, y'(0) = 0. \quad 20.$$

$$y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, y(0) = \ln 4, y'(0) = \ln 4 - 2.$$

$$21. y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right), y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{2}. \quad 22.$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 5\ln 3.$$

$$23. y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad 24.$$

$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = \pi. \quad 25.$$

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, y(0) = 2, y'(0) = 0. \quad 26.$$

$$y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}, y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9. \quad 27.$$

$$y'' + y = 2\operatorname{ctg}x, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = 2. \quad 28.$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 3\ln 2.$$

$$29. y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad 30.$$

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = \pi/2. \quad 31.$$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$