

#### § 4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

- 1) Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
- 2) Неопределенный интеграл, его свойства.
- 3) Таблица неопределенных интегралов.
- 4) Замена переменной и интегрирование по частям и неопределенном интеграле.
- 5) Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
- 6) Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
- 7) Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
- 8) Интегрирование иррациональных выражений.
- 9) Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
- 10) Основные свойства определенного интеграла.
- 11) Теорема о среднем.
- 12) Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
- 13) Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
- 14) Интегрирование биномиальных дифференциалов.
- 15) Вычисление площадей плоских фигур.
- 16) Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

#### § 4.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

- 1) Считаая, что функция  $\frac{\sin x}{x}$  равна 1 при  $x = 0$ , доказать, что она интегрируема на отрезке  $[0,1]$ .

- 2) Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx ?$$

- 3) Пусть  $f(t)$  — непрерывная функция, а функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

- 4) Найти  $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^3} dt$ .

- 5) Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt.$$

- 6) Пусть  $f(x)$  — непрерывная периодическая функция с периодом  $T$ . Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a.$$

7) Доказать, что если  $f(x)$  — четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^{+a} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(x)dx.$$

8) Доказать, что для нечетной функции  $f(x)$  справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^{+a} f(x)dx \text{ и } \int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0.$$

Чему равен интеграл  $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ ?

9) При каком условии, связывающем коэффициенты  $a, b, c$ , интеграл  $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$  является рациональной функцией?

10) При каких целых значениях  $n$  интеграл  $\int \sqrt{1+x^n} dx$  выражается элементарными функциями?

### § 4.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Задача 1.** Найти неопределенные интегралы.

1.  $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$

12.  $\int (4x-3)e^{-2x} dx.$

2.  $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx.$

13.  $\int (2-9x)e^{-3x} dx.$

3.  $\int (3x+4)e^{3x} dx.$

14.  $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx.$

4.  $\int (4x-2)\cos 2x dx.$

15.  $\int \arctg \sqrt{3x-1} dx.$

5.  $\int (4-16x)\sin 4x dx.$

16.  $\int \arctg \sqrt{5x-1} dx.$

6.  $\int (5x-2)e^{3x} dx.$

17.  $\int (5x+6)\cos 2x dx.$

7.  $\int (1-6x)e^{2x} dx.$

18.  $\int (3x-2)\cos 5x dx.$

8.  $\int \ln(x^2+4) dx.$

19.  $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx.$

9.  $\int \ln(4x^2+1) dx.$

20.  $\int (4x+7)\cos 3x dx.$

10.  $\int (2-4x)\sin 2x dx.$

21.  $\int (2x-5)\cos 4x dx.$

11.  $\int \arctg \sqrt{6x-1} dx.$

22.  $\int (8-3x)\cos 5x dx.$

$$23. \int (x+5) \sin 3x dx.$$

$$24. \int (2-3x) \sin 2x dx.$$

$$25. \int (4x+3) \sin 5x dx.$$

$$26. \int (7x-10) \sin 4x dx.$$

$$27. \int (\sqrt{2}-8x) \sin 3x dx.$$

$$28. \int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

$$29. \int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

$$30. \int x \sin^2 x dx.$$

$$31. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$$

**Задача 2.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$2. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$$

$$4. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$$

$$5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$6. \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

$$7. \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$$

$$8. \int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$$

$$10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$$

$$11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$14. \int_0^3 (x^2 - 2x) \sin 2x dx.$$

$$15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$16. \int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$18. \int_0^{\pi/4} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$19. \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$20. \int_{\pi/4}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{3\sqrt{x^2}}.$$

$$24. \int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$$

$$25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx.$$

$$26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx.$$

$$27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx.$$

$$28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$29. \int_{-1}^1 x^2 e^{-x/2} dx.$$

$$30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$31. \int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{x/2} dx.$$

**Задача 3.** Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2. \int \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4. \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$5. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$6. \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$8. \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$9. \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$10. \int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$$

$$11. \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$12. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$13. \int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx.$$

$$14. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$$

$$15. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$16. \int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$17. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$$

$$18. \int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$19. \int \frac{x^3}{x^2+4} dx.$$

$$20. \int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx.$$

$$21. \int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx.$$

$$22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$23. \int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx.$$

$$24. \int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

$$25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$26. \int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$27. \int \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$28. \int \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$29. \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$31. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

**Задача 4.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$3. \int_0^1 \frac{4\arctg x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$31. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

**Задача 5.** Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$2. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

$$3. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$5. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$6. \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$8. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$$

$$9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$$

$$12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

$$13. \int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$$

$$15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$$

$$18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$$

$$19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$$

$$21. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x-3)(x-1)x} dx.$$

$$23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

$$24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

$$25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

$$27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

$$28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

$$29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

$$30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

$$31. \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

**Задача 6.** Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$2. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

$$3. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$4. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$7. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$8. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

$$9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

$$11. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$13. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$14. \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

$$15. \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$16. \int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

$$17. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$18. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$19. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$20. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$21. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$22. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$23. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$24. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$25. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$26. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$27. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

$$28. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

$$29. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$30. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$31. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

**Задача 7.** Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

$$3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$7. \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx.$$

$$8. \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2 + 3)} dx.$$

$$9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

$$11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2 + 4x + 5)} dx.$$

$$12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx.$$

$$15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$



$$19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$27. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$28. \int \frac{x + 4}{(x^2 + 2)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$29. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$31. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

**Задача 8.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$3. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}.$$

$$4. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$6. \int_{2 \operatorname{arctg} 2}^{2 \operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)}.$$

$$7. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/3)}^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

$$8. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$$

$$12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$14. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$15. \int_0^2 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$16. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x)(1 - \sin x)}.$$

$$17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}.$$

$$18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$20. \int_{00}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}.$$

$$23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$27. \int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}.$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}.$$

$$29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$$

$$30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$31. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

**Задача 9.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$2. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$3. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{7})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$4. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$5. \int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$6. \int_0^{\arccos(2/3)} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$7. \int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$8. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 1 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9. \int_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$$

$$10. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$11. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx.$$

$$12. \int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$13. \int_0^{\operatorname{arctg}3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx.$$

$$14. \int_0^{\operatorname{arctg}2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$15. \int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$16. \int_0^{\operatorname{arcsin} \sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}.$$

$$17. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$18. \int_{\operatorname{arcsin}(2/\sqrt{5})}^{\operatorname{arcsin}(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx.$$

$$19. \int_{-\operatorname{arccos}(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx.$$

$$20. \int_0^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

$$21. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arcsin}(2/\sqrt{5})} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$$

$$22. \int_0^{\operatorname{arcsin} \sqrt{7/8}} \frac{6 \sin^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}.$$

$$23. \int_{-\operatorname{arccos}(1/\sqrt{5})}^0 \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$$

$$24. \int_0^{\operatorname{arcsin}(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx.$$

$$25. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arccos}(1/\sqrt{26})} \frac{36 dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$26. \int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$27. \int_{-\operatorname{arcsin}(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$$

$$28. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arcsin} \sqrt{2/3}} \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin^2 x - 7}.$$

$$29. \int_{\operatorname{arccos}(1/\sqrt{10})}^{\operatorname{arccos}(1/\sqrt{26})} \frac{12 dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$30. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$31. \int_0^{\operatorname{arccos}(1/\sqrt{6})} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx.$$

**Задача 10.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx.$$

$$5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx.$$

$$6. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10. \int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4} dx.$$

$$11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{2} dx.$$

$$12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$13. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \cos^4 x dx.$$

$$14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$16. \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4} dx.$$

$$17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$$

$$21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx.$$

$$22. \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx.$$

$$23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$24. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$25. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx.$$

$$27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$28. \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx.$$

$$29. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx.$$

$$30. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$31. \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx.$$

**Задача 11.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_0^1 \frac{4\sqrt{x-1} - \sqrt{3x-1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$$

$$2. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$

$$3. \int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$4. \int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx.$$

$$5. \int_0^5 e^{\sqrt{\frac{9-x}{9+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$$

$$6. \int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx.$$

$$7. \int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$8. \int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx.$$

$$9. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$10. \int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

$$11. \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx.$$

$$22. \int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$12. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2} dx.$$

$$23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$$

$$13. \int_{-1/2}^0 \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2} dx.$$

$$14. \int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$25. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\sqrt{x}}.$$

$$15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$26. \int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x-1}} dx.$$

$$16. \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$$

$$27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$$

$$17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx.$$

$$28. \int_1^{64} \frac{6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25} dx}{(x+25)^2 \sqrt{x+1}}.$$

$$29. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2}.$$

$$19. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}.$$

$$30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$$

$$20. \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$$

$$31. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}) dx}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2}.$$

$$21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$$

**Задача 12.** Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$$

$$5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$3. \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$4. \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}} dx.$$

$$15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$24. \int_3^6 \frac{x^2-9}{x^4} dx.$$

$$25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$31. \int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

**Задача 13.** Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt{x^4}} dx.$$

$$5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^2}}{x^{29}\sqrt{x}} dx.$$

$$8. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt{x})^2}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$$

$$9. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx.$$

$$11. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt{x})^3}}{x^8\sqrt{x^7}} dx.$$

$$12. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x})^3}}{x^{12}\sqrt{x^7}} dx.$$

$$13. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}}{x^{26}\sqrt{x}} dx.$$

$$14. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^{28}\sqrt{x}} dx.$$

$$15. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^2}}{x^{24}\sqrt{x}} dx.$$

$$17. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt{x})^4}}{x^{10}\sqrt{x^9}} dx.$$

$$18. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x})^4}}{x^5\sqrt{x^3}} dx.$$

$$19. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}{x^{25}\sqrt{x}} dx.$$

$$20. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^4}}{x^{220}\sqrt{x^7}} dx.$$

$$21. \int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[5]{x^4})}}{x^{225}\sqrt{x^{11}}} dx.$$

$$22. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}} dx.$$

$$23. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^{215}\sqrt{x}} dx.$$

$$24. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^{23}\sqrt{x}} dx.$$

$$25. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^{25}\sqrt{x^2}} dx.$$

$$26. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x^3\sqrt{x}} dx.$$

$$27. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^2}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx.$$

$$28. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx.$$

$$29. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$$

$$30. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx.$$

$$31. \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^5\sqrt{x^2}} dx.$$

**Задача 14.** Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1.  $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$

2.  $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 3).$

3.  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

4.  $y = \sin x \cos^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2).$

5.  $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$

6.  $y = x^2\sqrt{4 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2).$

7.  $y = \cos x \sin^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2)$ .

8.  $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2$ .

9.  $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3$ .

10.  $y = \arccos x, y = 0, x = 0$ .

11.  $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1$ .

12.  $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$ .

13.  $y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 6)$ .

14.  $y = \arccos y, x = 0, y = 0$ .

15.  $y = x \arctg x, y = 0, x = \sqrt{3}$ .

16.  $y = x^2 \sqrt{8 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ .

17.  $y = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2$ .

18.  $y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2)$ .

19.  $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, y = 0, x = 1$ .

20.  $y = \frac{1}{1 + \cos x}, y = 0, x = \pi/2, x = -\pi/2$ .

21.  $x = (y - 2)^3, x = 4y - 8$ .

22.  $y = \cos^5 x \sin 2x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2)$ .

23.  $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, y = 0, x = 1$ .

24.  $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$ .

25.  $x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, x = 0, y = 1, y = e^3$ .

26.  $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, y = 0, x = 2, x = 1$ .

27.  $y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 4)$ .

28.  $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, y = 1$ .

29.  $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1$ .

30.  $y = x^2 \cos x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2)$ .

31.  $x = 4 - (y - 1)^2, x = y^2 - 4y + 3$ .

**Задача 15.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

1. 
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$$
  
 $x = 2 (x \geq 2)$ .

2. 
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases}$$
  
 $y = 2 (y \geq 2)$ .

3. 
$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$$
  
 $y = 4 (0 < x < 8\pi, y \geq 4)$ .

4. 
$$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases}$$
  
 $x = 2 (x \geq 2)$ .

5. 
$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases}$$
  
 $y = 3 (y \geq 3)$ .

6. 
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$$
  
 $y = 3 (0 < x < 4\pi, y \geq 3)$ .

7. 
$$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$$
  
 $x = 6\sqrt{3} (x \geq 6\sqrt{3})$ .

8. 
$$\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases}$$
  
 $y = \sqrt{3} (y \geq \sqrt{3})$ .



$$9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 3(0 < x < 6\pi, y \geq 3).$$

$$10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 4(x \geq 4).$$

$$11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 3(y \geq 3).$$

$$12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(t - \cos t), \end{cases} \\ y = 9(0 < x < 12\pi, y \geq 9).$$

$$13. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 4(x \geq 4).$$

$$14. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \\ y = 4(y \geq 4).$$

$$15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6(0 < x < 12\pi, y \geq 6).$$

$$16. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 3\sqrt{3}(x \geq 3\sqrt{3}).$$

$$17. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \\ y = 2\sqrt{3}(y \geq 2\sqrt{3}).$$

$$18. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 15(0 < x < 20\pi, y \geq 15).$$

$$19. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1(x \geq 1).$$

$$20. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 4(y \geq 4).$$

$$21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \\ y = 1(0 < x < 2\pi, y \geq 1).$$

$$22. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1(x \geq 1).$$

$$23. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \\ y = 2(y \geq 2).$$

$$24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 12(0 < x < 16\pi, y \geq 12).$$

$$25. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 9\sqrt{3}(x \geq 9\sqrt{3}).$$

$$26. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \\ x = 4\sqrt{3}(y \geq 4\sqrt{3}).$$

$$27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 2(0 < x < 4\pi, y \geq 2).$$

$$28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2(x \geq 2).$$

$$29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 5(y \geq 5).$$

$$30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6(0 < x < 8\pi, y \geq 6).$$

$$31. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases}$$
$$x = 12\sqrt{3} (x \geq 12\sqrt{3}).$$

**Задача 16.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1.  $r = 4 \cos \varphi, r = 2 (r \geq 2)$ .

2.  $r = \cos 2\varphi$ .

3.  $r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

4.  $r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$ .

5.  $r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

6.  $r = \sin 3\varphi$ .

7.  $r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 (r \geq 3)$ .

8.  $r = \cos 3\varphi$ .

9.  $r = \cos \varphi, r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4)$   
 $(-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

10.  $r = \sin \varphi, r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4)$   
 $(0 \leq \varphi \leq 3\pi/4)$ .

11.  $r = 6 \cos 3\varphi, r = 3 (r \geq 3)$ .

12.  $r = \frac{1}{2} \sin \varphi$ .

13.  $r = \cos \varphi, r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

14.  $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4)$   
 $(\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4)$ .

15.  $r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi$ .

16.  $r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi$ .

17.  $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ .

18.  $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$ .

19.  $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .

20.  $r = \frac{5}{2} \sin \varphi, r = \frac{3}{2} \sin \varphi$ .

21.  $r = \frac{3}{2} \cos \varphi, r = \frac{5}{2} \cos \varphi$ .

22.  $r = 4 \cos 4\varphi$ .

23.  $r = \sin 6\varphi$ .

24.  $r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi$ .

25.  $r = \cos \varphi + \sin \varphi$ .

26.  $r = 2 \sin 4\varphi$ .

27.  $r = 2 \cos 6\varphi$ .

28.  $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ .

29.  $r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi$ .

30.  $r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$ .

31.  $r = 6 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$ .

**Задача 17.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1.  $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ .

2.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$

3.  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$

4.  $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ .

5.  $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6$

6.  $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$

$$7. y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \frac{1}{4} \leq x \leq 1$$

$$8. y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$$

$$9. y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$$

$$10. y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$11. y = 2 + chx, 0 \leq x \leq 1$$

$$12. y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6$$

$$13. y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$14. y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$15. y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$$

$$16. y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}$$

$$17. y = 1 - \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2$$

$$18. y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4$$

$$19. y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \leq x \leq 1$$

$$20. y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}$$

$$21. y = \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2$$

$$22. y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$23. y = chx + 3, 0 \leq x \leq 1$$

$$24. y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$$

$$25. y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \pi/6$$

$$26. y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$27. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq 2$$

$$28. y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$29. y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{3}, 0 \leq x \leq 2$$

$$30. y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

$$31. y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq 3$$

**Задача 18.** Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2.$$

$$4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases} \\ \pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$13. \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$14. \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$16. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$17. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/6.$$

$$18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$20. \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$22. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$23. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2.$$

$$25. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$26. \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$28. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3\pi.$$

$$29. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$31. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

**Задача 19.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$1. \begin{cases} \rho = 3e^{3\varphi/4}, \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \rho = 2e^{4\varphi/3}, \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \rho = 5e^{5\varphi/12}, \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \rho = 6e^{12\varphi/5}, \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \rho = 3e^{3\varphi/4}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \rho = 4e^{4\varphi/3}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \rho = 5e^{5\varphi/12}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \rho = 12e^{12\varphi/5}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \rho = 1 - \sin \varphi, \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \rho = 2(1 - \cos \varphi), \\ -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \rho = 3(1 + \sin \varphi), \\ -\pi/6 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \rho = 4(1 - \sin \varphi), \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \rho = 5(1 - \cos \varphi), \\ -\pi/3 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \rho = 6(1 + \sin \varphi), \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \rho = 7(1 - \sin \varphi), \\ -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \rho = 8(1 - \cos \varphi), \\ -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \rho = 2\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 3/4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \rho = 2\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 4/3. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \rho = 2\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \rho = 2\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \rho = 4\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 3/4. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \rho = 3\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 4/3. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \rho = 5\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \rho = 2 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \rho = 8 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \rho = 6 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3. \end{cases}$$

29.  $\rho = 2 \sin \varphi,$   
 $0 \leq \varphi \leq \pi / 6.$

30.  $\rho = 8 \sin \varphi,$   
 $0 \leq \varphi \leq \pi / 4.$

31.  $\rho = 6 \sin \varphi,$   
 $0 \leq \varphi \leq \pi / 3.$

**Задача 20.** Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

1.  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = y, z = 0 (y \geq 0).$

2.  $z = x^2 + 4y^2, z = 2.$

3.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

4.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$

5.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = -1, z = 1, z = 0.$

6.  $x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0 (y \geq 0).$

7.  $z = x^2 + 9y^2, z = 3.$

8.  $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

9.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$

10.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z = 2, z = 0.$

11.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0 (y \geq 0).$

12.  $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4.$

13.  $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$

14.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$

15.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0.$

16.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0 (y \geq 0).$

17.  $z = x^2 + 5y^2, z = 5.$

18.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4.$

19.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$

20.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0.$

21.  $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0 (y \geq 0).$

22.  $z = 4x^2 + 9y^2, z = 6.$

23.  $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

24.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$

25.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 5, z = 0.$

26.  $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0 (y \geq 0).$

27.  $z = 2x^2 + 18y^2, z = 6.$

28.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$

29.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$

30.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 6, z = 0.$

31.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, z = 7, z = 0.$

**Задача 21.** Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1-16 ось вращения  $Ox$ , в вариантах 17-31 ось вращения  $Oy$ .

1.  $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$ .

2.  $2x - x^2 - y = 0,$   
 $2x^2 - 4x + y = 0$ .

3.  $y = 3 \sin x, y = \sin x,$   
 $0 \leq x \leq \pi$ .

4.  $y = 5 \cos x, y = \cos x,$   
 $x = 0, x \leq 0$ .

5.  $y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0$ .

6.  $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1$ .

7.  $y = xe^x, y = 0, x = 1$ .

8.  $y = -2x - x^2, y = -x + 2,$   
 $x = 0$ .

9.  $y = 2x - x^2, y = -x + 2$ .

10.  $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1$ .

11.  $y = x^2, y^2 - x = 0$ .

12.  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ .

13.  $y = -1 - x^2, x = 0$ .

14.  $y = x^2, y = 1, x = 2$ .

15.  $y = x^3, y = \sqrt{x}$ .

16.  $y = \sin \frac{\pi x}{2}, y = x^2$ .

17.  $y = \arccos \frac{x}{3}, y = \arccos x, y = 0$ .

18.  $y = \arcsin \frac{x}{5}, y = \arcsin x, y = \frac{\pi}{2}$ .

19.  $y = x^2, x = 2, y = 0$ .

20.  $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1$ .

21.  $y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0,5$ .

22.  $y = \ln x, x = 2, y = 0$ .

23.  $y = (x-1)^2, y = 1$ .

24.  $y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1$ .

25.  $y = x^3, y = x^2$ .

26.  $y = \arccos \frac{x}{5}, y = \arccos \frac{x}{3}, y = 0$ .

27.  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = 0$ .

28.  $y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0$ .

29.  $y = x^3, y = x$ .

30.  $y = \arccos x, y = \arcsin x, x = 0$ .

31.  $y = (x-1)^2, x = 0, x = 2, y = 0$ .

**Задача 22. Варианты 1-10.** Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции (рис.4.1). Плотность воды,

$\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , ускорение свободного падения положить равным  $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

Указание. Давление на глубине  $x$  равно  $\rho g x$ .

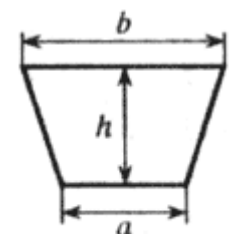


Рис. 4.1

1.  $a = 4,5\text{м}, b = 6,6\text{м}, h = 3,0\text{м}$ .

2.  $a = 4,8\text{м}, b = 7,2\text{м}, h = 3,0\text{м}$ .

3.  $a = 5,1\text{м}, b = 7,8\text{м}, h = 3,0\text{м}$ .

4.  $a = 5,4\text{м}, b = 8,4\text{м}, h = 3,0\text{м}$ .

5.  $a = 5,7\text{м}, b = 9,0\text{м}, h = 4,0\text{м}$ .

6.  $a = 6,0\text{м}, b = 9,6\text{м}, h = 4,0\text{м}$ .

7.  $a = 6,3\text{м}, b = 10,2\text{м}, h = 4,0\text{м}$ .

8.  $a = 6,6\text{м}, b = 10,8\text{м}, h = 4,0\text{м}$ .

9.  $a = 6,9\text{ м}, b = 11,4\text{ м}, h = 5,0\text{ м}.$

10.  $a = 7,2\text{ м}, b = 12,0\text{ м}, h = 5,0\text{ м}.$

*Варианты 11-20.* Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника Земли на высоту  $H$  км. Масса спутника равна  $m$  т, радиус Земли  $R_3 = 6380$  км. Ускорение свободного падения  $g$  у поверхности Земли положить равным  $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

11.  $m = 7,0$  т,  $H = 200$  км.

16.  $m = 5,0$  т,  $H = 450$  км.

12.  $m = 7,0$  т,  $H = 250$  км.

17.  $m = 4,0$  т,  $H = 500$  км.

13.  $m = 6,0$  т,  $H = 300$  км.

18.  $m = 4,0$  т,  $H = 550$  км.

14.  $m = 6,0$  т,  $H = 350$  км.

19.  $m = 3,0$  т,  $H = 600$  км.

15.  $m = 5,0$  т,  $H = 400$  км.

20.  $m = 3,0$  т,  $H = 650$  км.

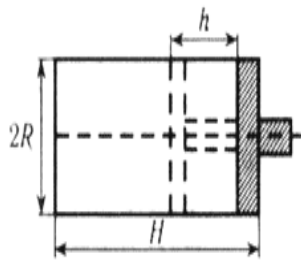


Рис. 4.2

*Варианты 21-31.* Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением  $103,3 \text{ кПа}$ . Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изометрическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на  $h$  м (рис.4.2).

Указание. Уравнение состояния газа  $pV = const$ , где  $p$  — давление,  $V$  — объем.

21.  $H = 0,4\text{ м}, h = 0,35\text{ м}, R = 0,1\text{ м}.$

27.  $H = 1,6\text{ м}, h = 1,4\text{ м}, R = 0,3\text{ м}.$

22.  $H = 0,4\text{ м}, h = 0,3\text{ м}, R = 0,1\text{ м}.$

28.  $H = 1,6\text{ м}, h = 1,2\text{ м}, R = 0,3\text{ м}.$

23.  $H = 0,4\text{ м}, h = 0,2\text{ м}, R = 0,1\text{ м}.$

29.  $H = 1,6\text{ м}, h = 0,8\text{ м}, R = 0,3\text{ м}.$

24.  $H = 0,8\text{ м}, h = 0,7\text{ м}, R = 0,2\text{ м}.$

30.  $H = 2,0\text{ м}, h = 1,5\text{ м}, R = 0,4\text{ м}.$

25.  $H = 0,8\text{ м}, h = 0,6\text{ м}, R = 0,2\text{ м}.$

31.  $H = 2,0\text{ м}, h = 1,0\text{ м}, R = 0,4\text{ м}.$

26.  $H = 0,8\text{ м}, h = 0,4\text{ м}, R = 0,2\text{ м}.$