

### § 10.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

- 1) Линейное пространство. Базис. Координаты.
- 2) Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.
- 3) Линейный оператор. Матрица оператора.
- 4) Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
- 5) Действия над линейными операторами.
- 6) Собственные векторы и собственные значения.
- 7) Евклидово пространство. Неравенство Коши—Буняковского.
- 8) Сопряженные и самосопряженные операторы. Их матрицы.
- 9) Ортогональное преобразование; свойства; матрица.
- 10) Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

### § 10.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

- 1) Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства  $L$  пространства  $R_3$ , если  $L$  задано уравнением  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ .
- 2) Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.
- 3) Найти координаты многочлена  $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  в базисе  $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$ .
- 4) Линейный оператор  $A$  в базисе  $(e_1, e_2, e_3)$  имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе  $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ .

- 5) Найти ядро и образ оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.
- 6) Пусть  $x$  и  $y$  — собственные векторы линейного оператора  $A$ , относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор  $z = \alpha x + \beta y, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ , не является собственным вектором оператора  $A$ .
- 7) Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3), Ax = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ . Будет ли оператор  $A$  самосопряженным?
- 8) Доказать, что если матрица оператора  $A$  — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

### § 10.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Задача 1.** Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов  $a$  и  $b$  и произведение любого элемента  $a$  на любое число  $\alpha$ ?

1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых — целые числа; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .

2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
4. Множество всех векторов трехмерного пространства; сумма  $a \cdot b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot |a|$ .
6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов  $x, y, z$ ; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
7. Множество всех функций  $a = f(t), b = g(t)$ , принимающих положительные значения; сумма  $f(t) \cdot g(t)$ , произведение  $f^\alpha(t)$ .
8. Множество всех непрерывных функций  $a = f(t), b = g(t)$ , заданных на  $[0,1]$ ; сумма  $f(t) + g(t)$ , произведение  $\alpha \cdot f(t)$ .
9. Множество всех четных функций  $a = f(t), b = g(t)$ , заданных на  $[-1,+1]$ ; сумма  $f(t) \cdot g(t)$ , произведение  $f^\alpha(t)$ .
10. Множество всех нечетных функций  $a = f(t), b = g(t)$ , заданных на  $[-1,+1]$ ; сумма  $f(t) + g(t)$ , произведение  $\alpha \cdot f(t)$ .
11. Множество всех линейных функций  $a = f(x_1, x_2), b = g(x_1, x_2)$ ; сумма  $f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$ , произведение  $\alpha \cdot f(x_1, x_2)$ .
12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной  $x$ ; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
13. Множество всех многочленов степени, меньшей или равной трем от переменных  $x, y$ ; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
14. Множество всех упорядоченных наборов из  $n$  чисел  $a = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, b = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ; сумма  $\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}$ , произведение  $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n\}$ .
15. Множество всех упорядоченных наборов из  $n$  чисел  $a = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, b = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ; сумма  $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n\}$ , произведение  $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n\}$ .
16. Множество всех сходящихся последовательностей  $a = \{u_n\}, b = \{v_n\}$ ; сумма  $\{u_n + v_n\}$ , произведение  $\{\alpha u_n\}$ .
17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной  $n$ ; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
18. Множество всех многочленов от одной переменной степени  $n$ ; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .
19. Множество всех диагональных матриц  $a = \|a_{ik}\|, b = \|b_{ik}\|, i, k = 1, 2, \dots, n$ ; сумма  $\|a_{ik} + b_{ik}\|$ , произведение  $\|\alpha a_{ik}\|$ .

20. Множество всех невырожденных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, b = \|b_{ik}\|, i, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\text{сумма } \|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|, \text{ произведение } \|\alpha a_{ik}\|.$$

21. Множество всех квадратных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, b = \|b_{ik}\|, i, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\text{сумма } \|a_{ik} + b_{ik}\|, \text{ произведение } \|\alpha a_{ik}\|.$$

22. Множество всех диагональных матриц  $a = \|a_{ik}\|, b = \|b_{ik}\|, i, k = 1, 2, \dots, n;$

$$\text{сумма } \|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|, \text{ произведение } \|\alpha a_{ik}\|.$$

23. Множество всех прямоугольных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, b = \|b_{ik}\|, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\text{сумма } \|a_{ik} + b_{ik}\|, \text{ произведение } \|\alpha a_{ik}\|.$$

24. Множество всех симметричных матриц

$$a = \|a_{ik}\| (a_{ik} = a_{ki}), b = \|b_{ik}\| (b_{ik} = b_{ki}), i, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\text{сумма } \|a_{ik} + b_{ik}\|, \text{ произведение } \|\alpha a_{ik}\|.$$

25. Множество всех целых чисел; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .

26. Множество всех действительных чисел; сумма  $a + b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .

27. Множество всех положительных чисел; сумма  $a \cdot b$ , произведение  $a^\alpha$ .

28. Множество всех отрицательных чисел; сумма  $-|a| \cdot |b|$ , произведение  $-|a|^\alpha$ .

29. Множество всех действительных чисел; сумма  $a \cdot b$ , произведение  $\alpha \cdot a$ .

30. Множество всех дифференцируемых функций  $a = f(t), b = g(t)$ ; сумма  $f(t) + g(t)$ , произведение

$$\alpha \cdot f(t).$$

31. Множество всех дифференцируемых функций  $a = f(t), b = g(t)$ ; сумма  $f(t) \cdot g(t)$ , произведение

$$\alpha \cdot f(t).$$

**Задача 2.** Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

- |                            |                                    |                                   |
|----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $a = \{1, 4, 6\},$         | 2,                                 | 1,                                |
| 1. $b = \{1, -1, 1\},$     | $\sin x,$                          | 6. $x,$                           |
| $c = \{1, 1, 1\}.$         | 4. $\sin^2 x$                      | $\sin x$ на $(-\infty, +\infty).$ |
| $\sin x,$                  | $\cos^2 x$ на $(-\infty, +\infty)$ | $a = \{1, 1, 1\},$                |
| 2. $\cos x,$               | $a = \{5, 4, 3\},$                 | 7. $b = \{0, 1, 1\},$             |
| $tgx$ на $(-\pi/2, \pi/2)$ | 5. $b = \{3, 3, 2\},$              | $c = \{0, 0, 1\}.$                |
| $a = \{2, -3, 1\},$        | $c = \{8, 1, 3\}.$                 | $e^x,$                            |
| 3. $b = \{3, -1, 5\},$     |                                    | 8. $e^{2x},$                      |
| $c = \{1, -4, 3\}.$        |                                    | $e^{3x}$ на $(-\infty, +\infty).$ |

- $a = \{1, -1, 2\}$ ,  
 9.  $b = \{-1, 1, -1\}$ ,  
 $c = \{2, -1, 1\}$ .  
 $x$ ,  
 10.  $x^2$ ,  
 $(1+x)^2$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{1, 2, 3\}$ ,  
 11.  $b = \{4, 5, 6\}$ ,  
 $c = \{7, 8, 9\}$ .  
 1,  $x$ ,  
 12.  $x^2$ ,  
 $(1+x)^2$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{1, 1, 1\}$ ,  
 13.  $b = \{1, 2, 3\}$ ,  
 $c = \{1, 3, 6\}$ .  
 $\cos x$ ,  
 14.  $\sin x$ ,  
 $\sin 2x$  на  $(-\pi/2, \pi/2)$ .  
 $a = \{3, 4, -5\}$ ,  
 15.  $b = \{8, 7, -2\}$ ,  
 $c = \{2, -1, 8\}$ .  
 $e^x$ ,  
 16.  $x^{-x}$ ,  
 $e^{2x}$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{3, 2, -4\}$ ,  
 17.  $b = \{4, 1, -2\}$ ,  
 $c = \{5, 2, -3\}$ .  
 $1+x+x^2$ ,  
 18.  $1+2x+x^2$ ,  
 $1+3x+x^2$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{0, 1, 1\}$ ,  
 19.  $b = \{1, 0, 1\}$ ,  
 $c = \{1, 1, 0\}$ .  
 1,  $e^x$ ,  
 20.  $e^x$ ,  
 $shx$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{5, -6, 1\}$ ,  
 21.  $b = \{3, -5, -2\}$ ,  
 $c = \{2, -1, 3\}$ .  
 $\frac{1}{x}$ ,  
 22.  $x$ ,  
 $1$  на  $(0, 1)$ .  
 $a = \{7, 1, -3\}$ ,  
 23.  $b = \{2, 2, -4\}$ ,  
 $c = \{3, -3, 5\}$ .  
 1,  $tgx$ ,  
 24.  $tgx$ ,  
 $ctgx$  на  $(0, \pi/2)$ .  
 $a = \{1, 2, 3\}$ ,  
 25.  $b = \{6, 5, 9\}$ ,  
 $c = \{7, 8, 9\}$ .  
 $x$ ,  
 26.  $1+x$ ,  
 $(1+x)^2$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{2, 1, 0\}$ ,  
 27.  $b = \{-5, 0, 3\}$ ,  
 $c = \{3, 4, 3\}$ .  
 $e^x$ ,  
 28.  $xe^x$ ,  
 $x^2e^x$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{2, 0, 2\}$ ,  
 29.  $b = \{1, -1, 0\}$ ,  
 $c = \{0, -1, -2\}$ .  
 $e^x$ ,  
 30.  $shx$ ,  
 $chx$  на  $(-\infty, +\infty)$ .  
 $a = \{-2, 1, 5\}$ ,  
 31.  $b = \{4, -3, 0\}$ ,  
 $c = \{0, -1, 10\}$ .

**Задача 3.** Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_3 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 1. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

**Задача 4.** Найти координаты вектора  $x$  в базисе  $(e_1', e_2', e_3')$ , если он задан в базисе  $(e_1, e_2, e_3)$ .

1.

$$x = \{6, -1, 3\}.$$

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' = 2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3, \\ e_2' = 3e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

2.  $x = \{1, 2, 4\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{2}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

5.  $x = \{6, 3, 1\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

3.  $x = \{1, 3, 6\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2' = \frac{4}{3}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

6.  $x = \{1, 4, 8\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e_2' = \frac{5}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4.  $x = \{2, 4, 1\}$ .

7.  $x = \{8, 4, 1\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3, \\ e_2' = 5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

8.  $x = \{2, 5, 10\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = \frac{6}{5}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

9.  $x = \{10, 5, 1\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

10.  $x = \{1, 6, 12\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2' = \frac{7}{6}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

11.  $x = \{-12, 6, 1\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{7}{6}e_3, \\ e_2' = 7e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

12.  $x = \{-1, 7, 14\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e_2' = \frac{8}{7}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

13.  $x = \{-3, 2, 4\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3, \\ e_2' = \frac{1}{2}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

14.  $x = \{2, 4, 3\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3, \\ e_2' = -e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

15.  $x = \{2, 6, -3\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e_2' = \frac{2}{3}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

16.  $x = \{12, 3, -1\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{2}{3}e_3, \\ e_2' = -2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

17.  $x = \{1, -4, 8\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

18.  $x = \{1, 4, -8\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

19.  $x = \{7, -5, 10\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e_2' = \frac{4}{5}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

20.  $x = \{5, -5, 4\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{5}e_3, \\ e_2' = -4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

21.  $x = \{1, -6, 6\}$ .



$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e_2' = \frac{5}{6}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

22.  $x = \{6, 6, 2\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{6}e_3, \\ e_2' = -5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

23.  $x = \{1, 7, -7\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = \frac{6}{7}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

24.  $x = \{7, 7, 2\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{7}e_3, \\ e_2' = -6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

25.  $x = \{3, -8, 8\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 7e_3, \\ e_2' = \frac{7}{8}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

26.  $x = \{1, -9, 9\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 8e_3, \\ e_2' = \frac{8}{9}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

27.  $x = \{9, 9, 2\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{8}{9}e_3, \\ e_2' = -8e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

28.  $x = \{3, -10, 10\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 9e_3, \\ e_2' = \frac{9}{10}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

29.  $x = \{10, 10, 7\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{9}{10}e_3, \\ e_2' = -9e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

30.  $x = \{1, 9, 18\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 10e_3, \\ e_2' = \frac{10}{9}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

31.  $x = \{1, 10, 10\}$ .

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 11e_3, \\ e_2' = \frac{11}{10}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

**Задача 5.** Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3),$$

1.  $Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2)$ ,

$$Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3).$$

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2),$$

$$2. \quad Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3),$$

$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3).$$

$$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2^4 + 3x_3),$$

$$3. \quad Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3).$$

$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$

$$4. \quad Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4),$$

$$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3).$$

$$Ax = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3, 4x_1 - 5x_2 - 6),$$

$$5. \quad Bx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3),$$

$$Cx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6x_3).$$

$$Ax = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3),$$

$$6. \quad Bx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3),$$

$$Cx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 3x_1 - 4x_2 - 5).$$

$$Ax = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$

$$7. \quad Bx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$$

$$Cx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3).$$

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2 + 3),$$

$$8. \quad Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1^3 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

$$Ax = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^4),$$

$$9. \quad Bx = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (2x_1 - x_2, 1, x_1 + 2x_2 + 3).$$

$$Ax = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$$

$$10. \quad Bx = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7),$$

$$Cx = (x_3, 0, 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3).$$

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0),$$

$$11. \quad Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0),$$

$$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3^2, 0).$$

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_3^2),$$

$$12. \quad Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, 1),$$

$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_3).$$

$$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1^2, x_2 + 2x_3),$$

$$13. \quad Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_2 + 2x_3),$$

$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1, x_2 + 2).$$

$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3),$$

$$14. Bx = (3x_1 + 2x_2 + 1, 0, x_1 - 2x_2 - 3),$$

$$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1^2 - 2x_2 - 3x_3).$$

$$Ax = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5),$$

$$15. Bx = (x_1, x_2^2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5),$$

$$Cx = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3).$$

$$Ax = (2x_1 + x_2, x_3^2, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$

$$16. Bx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$

$$Cx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4).$$

$$Ax = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$$

$$17. Bx = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5),$$

$$Cx = (x_1, x_2^2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3).$$

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$18. Bx = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0),$$

$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

$$Ax = (2x_1^2 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3),$$

$$19. Bx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3).$$

$$Ax = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$

$$20. Bx = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$$

$$Cx = (0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$$

$$21. Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$$

$$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$$

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$22. Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

$$Ax = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3, x_1 + x_3, 0),$$

$$23. Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3),$$

$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, 3x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3).$$

$$Ax = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 9x_1 + x_3),$$

$$24. Bx = (3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8, 9x_1 + x_3),$$

$$Cx = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 0).$$

$$Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7, 8x_1 + x_3),$$

$$25. Bx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 0),$$

$$Cx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 8x_1 + x_3).$$

$$Ax = (x_1^3 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 0),$$

$$26. Bx = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$$

$$Cx = (x_1 + 1, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3).$$

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$$

$$27. Bx = (3x_1 - 2x_2 - 1, x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$$

$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3^3, x_2 + 2x_3, 0).$$

$$Ax = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$

$$28. Bx = (2x_1 - x_2^3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 0),$$

$$Cx = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

$$Ax = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2),$$

$$29. Bx = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2),$$

$$Cx = (x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6, 7x_1 + 8x_2).$$

$$Ax = (x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3),$$

$$30. Bx = (x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3),$$

$$Cx = (x_2^3 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3).$$

$$Ax = (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3),$$

$$31. Bx = (1, x_1 - x_3, x_2 + x_3),$$

$$Cx = (x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3).$$

**Задача 6.** Пусть  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Ax = \{x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3\}$ ,  $Bx = \{x_2, 2x_3, x_1\}$ . Найти:

$$1. ABx$$

$$12. 2(AB + 2A)x.$$

$$22. (A(B + A))x.$$

$$2. A^2x.$$

$$13. (A - B)^2x.$$

$$23. (AB^2)x.$$

$$3. (A^2 - B)x.$$

$$14. (B - 2A^2)x.$$

$$24. (A(B - A))x.$$

$$4. B^4x.$$

$$15. BA^2x.$$

$$25. 2(B + 2A^2 + B^2)x.$$

$$5. B^2x.$$

$$16. (3A^2 + B)x.$$

$$26. (B(A - B))x.$$

$$6. (2A + 3B^2)x.$$

$$17. (A^2 + B)x.$$

$$27. (B - A + B^2)x.$$

$$7. (A^2 + B^2)x.$$

$$18. (A^2 - B^2)x.$$

$$28. (B(A + B))x.$$

$$8. (B^2 + A)x.$$

$$19. (2B - A^2)x.$$

$$29. (A + BA - B)x.$$

$$9. BAx$$

$$20. B^3x.$$

$$30. (3B + 2A^2)x.$$

$$10. 2A(2A - B)x.$$

$$21. (B^2 - 2A)x.$$

$$31. (B(2A + B))x.$$

$$11. A(2B - A)x.$$

**Задача 7.** Найти матрицу линейного оператора в базисе  $(e_1', e_2', e_3')$ , где

$$e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3, \text{ если она задана в базисе } (e_1, e_2, e_3).$$

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$23. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$24. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$25. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$15. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$26. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$16. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$27. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$6. \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$28. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$29. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$30. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$31. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$21. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$22. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 8.** Доказать линейность, найти матрицу (в базисе  $i, j, k$ ), образ и ядро оператора:

1. Проектирования на ось  $Ox$ .

2. Проектирования на плоскость  $z = 0$ .
3. Проектирования на ось  $Oz$ .
4. Зеркального отражения относительно плоскости  $Oyz$ .
5. Проектирования на ось  $Oy$ .
6. Проектирования на плоскость  $y = 0$ .
7. Зеркального отражения относительно плоскости  $x - y = 0$ .
8. Зеркального отражения относительно плоскости  $y + z = 0$ .
9. Проектирования на плоскость  $y - z = 0$ .
10. Проектирования на плоскость  $y = \sqrt{3}x$ .
11. Проектирования на плоскость  $Oyz$ .
12. Зеркального отражения относительно плоскости  $x - z = 0$ .
13. Зеркального отражения относительно плоскости  $Oxy$ .
14. Поворота относительно оси  $Ox$  на угол  $\pi/2$  в положительном направлении.
15. проектирования на плоскость  $x - y = 0$ .
16. проектирования на плоскость  $y + z = 0$ .
17. зеркального отражения относительно плоскости  $x + y = 0$ .
18. зеркального отражения относительно плоскости  $y - z = 0$ .
19. проектирования на плоскость  $x + y = 0$ .
20. проектирования на плоскость  $x - z = 0$ .
21. зеркального отражения относительно плоскости  $x + z = 0$ .
22. поворота относительно оси  $Oz$  в положительном направлении на угол  $\pi/2$ .
23. проектирования на плоскость  $\sqrt{3}y + z = 0$ .
24. зеркального отражения относительно плоскости  $Oxz$ .
25. поворота в положительном направлении относительно оси  $Oy$  на угол  $\pi/2$ .
26. проектирования на плоскость  $x + z = 0$ .
27. проектирования на плоскость  $y + \sqrt{3}z = 0$ .
28. проектирования на плоскость  $\sqrt{3}x + z = 0$ .
29. проектирования на плоскость  $\sqrt{3}x + y = 0$ .
30. поворота относительно оси  $Oz$  в положительном направлении на угол  $\pi/4$ .
31. проектирования на плоскость  $x - \sqrt{3}z = 0$ .

**Задача 9.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. 
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

23. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. 
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

25. 
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. 
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. 
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

26. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. 
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. 
$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. 
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. 
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. 
$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

28. 
$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}.$$

7. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

18. 
$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

29. 
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

19. 
$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

30. 
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

9. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

20. 
$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

31. 
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

21. 
$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

11. 
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

22. 
$$\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

**Задача 10.** Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

1.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ .

2.  $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$ .

3.  $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$ .

4.  $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$ .

5.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ .

6.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ .

7.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$ .

8.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ .

9.  $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$ .

10.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$ .

11.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$ .

12.  $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ .

13.  $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$ .

14.  $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$ .

15.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$ .

16.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$ .

17.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$ .

18.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$ .

19.  $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$ .

20.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ .

21.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$ .

22.  $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$ .

23.  $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$ .

24.  $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$ .

25.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$ .

26.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$ .

27.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$ .

28.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$ .

29.  $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ .

30.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2$ .

31.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$ .

**Задача 11.** Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

1.  $4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ .

2.  $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3$ .

3.  $2x_1^2 + 2x_2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ .

4.  $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ .

5.  $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ .

6.  $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$ .

7.  $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

8.  $3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$ .

9.  $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$ .

10.  $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ .

11.

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

12.  $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ .

13.  $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$ .

14.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$ .

15.  $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$ .

16.  $-\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

17.  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

18.  $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ .



$$19. 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$20. -4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

$$21. 10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$22. \frac{3}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

$$23. x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$24. 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3.$$

$$25. x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$$

$$26. x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$27. 5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3.$$

$$28. 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$$

$$29. 5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$30. -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

$$31. -3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

**Задача 12.** Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

$$1. -x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0.$$

$$2. 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$3. 4xy + 4x - 4y = 0.$$

$$4. -2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0.$$

$$5. -3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0.$$

$$6. 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$7. -x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0.$$

$$8. -4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0.$$

$$9. 4xy + 4x - 4y - 2 = 0.$$

$$10. x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0.$$

$$11. x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0.$$

$$12. x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0.$$

$$13. 2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$$

$$14. 4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0.$$

$$15. 3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0.$$

$$16. x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0.$$

$$17. 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0.$$

$$18. 4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$$

$$19. 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0.$$

$$20. -4xy - 4x + 4y + 6 = 0.$$

$$21. 5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0.$$

$$22. 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$$

$$23. -x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$24. 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0.$$

$$25. 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0.$$

$$26. -4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$$

$$27. 2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0.$$

$$28. x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0.$$

$$29. 4xy + 4x - 4y + 4 = 0.$$

$$30. 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$$

$$31. x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0.$$