## §3. Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки $x$. Пусть $\Delta x$ – приращение аргумента в точке $x$. Обозначим через $\Delta y$ или $\Delta f$ приращение функции, равное $f(x+\Delta x) - f(x)$. Отметим здесь, что функция непрерывна в точке $x$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f$.

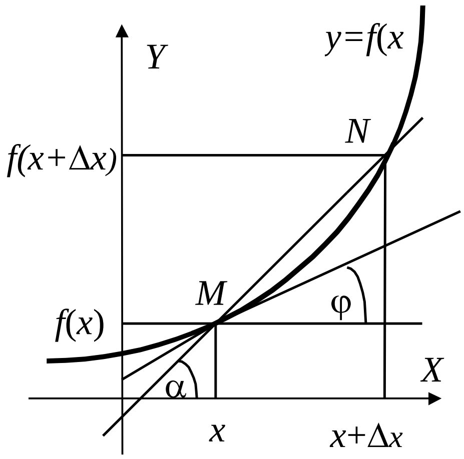

Рис. 1

Отношение $\Delta f/\Delta x$, как видно из рисунка 1, равно тангенсу угла $\alpha$, который составляет секущая $MN$ кривой $y = f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

Представим себе процесс, в котором величина $\Delta x$, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка $N$ будет двигаться вдоль кривой $y = f(x)$, приближаясь к точке $M$, а секущая $MN$ будет вращаться около точки $M$ так, что при очень малых величинах $\Delta x$ её угол наклона $\alpha$ будет сколь угодно близок к углу $\varphi$ наклона касательной к кривой в точке $x$. Следует отметить, что все сказанное относится к случаю, когда график функции $y = f(x)$ не имеет излома или разрыва в точке $x$, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение $\Delta y / \Delta x$ или, что то же самое $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$, можно рассматривать при заданном $x$ как функцию аргумента $\Delta x$. Эта функция не определена в точке $\Delta x = 0$. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$ в точке $\Delta x = 0$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке $x$ и обозначается $y'$ или $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием**.

Если для любого числа $x$ из открытого промежутка $(a, b)$ можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой на промежутке ($a$, $b$)**.

**Геометрический смысл** производной заключается в том, что производная функции $f(x)$ в точке $x$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

**Производная – это скорость изменения функции в точке** $x$. Из определения производной следует, что $f'(x) \approx \Delta f / \Delta x$, причем точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше $\Delta x$. Производная $f'(x)$ является приближенным коэффициентом пропорциональности между $\Delta f$ и $\Delta x$.

Производная функции $f(x)$ не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной. В то же время функция может быть непрерывной в точке $x_0$, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 2.

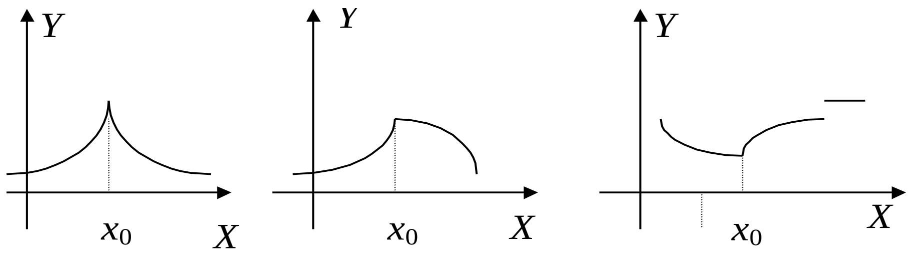


Рис. 2

Так функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, хотя является непрерывной в этой точке.

Ниже приводится таблица производных элементарных функций.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | $e^x$ | $e^x$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $x$ | 1 | $\ln x$ | $1/x$ | $\mathrm{tg}\, x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\arcsin a$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $1/(2\sqrt{x})$ | $\log_a x$ | $1/(x \ln a)$ | $\arccos a$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $1/x$ | $-1/x^2$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathrm{arctg}\, x$ | $1/(1+x^2)$ |

Приведем теперь основные свойства производной.

1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Если существует $f'(x)$, и $C$ - произвольное число, то функция $Cf(x)$ имеет производную: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

3. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $S(x) = f(x) + g(x)$ имеет производную: $S'(x) = f'(x) + g'(x)$.

4. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $P(x) = f(x)g(x)$ имеет производную: $P'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

5. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ и при этом $g(x) \neq 0$, то функция $D(x) = f(x) / g(x)$ имеет производную: $D'(x) = (f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)) / g^2(x)$.

В любом курсе математического анализа доказывается теорема о **производной сложной функции**. Мы ограничимся лишь ее формулировкой.

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке $x$, а функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = g(x)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет в точке $x$ производную $F'(x) = f'(z)\,g'(x)$.

Приведем примеры вычисления производной сложной функции.

$$F(x) = \sin^2 x,\ F'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x;$$
$$F(x) = \sin x^2,\ F'(x) = 2x\cos x^2;$$
$$F(x) = \ln\cos x, F'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg} x;$$
$$F(x) = \cos\ln x, F'(x) = (-\sin \ln x)\frac{1}{x}.$$

## §4. Дифференциал функции

Рассмотрим две функции: $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, которые имеют производные $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ в каждой точке некоторой области $D$. Возьмем какую-либо точку $x$ из области $D$ и дадим аргументу приращение $\Delta x$. Тогда функции получат соответственно приращения $\Delta y_1 = f_1(x + \Delta x) - f_1(x)$ и $\Delta y_2 = f_2(x + \Delta x) - f_2(x)$. Из графиков, изображенных на рисунке 3, видно, что в обоих случаях приращения $\Delta y_1$ и $\Delta y_2$ можно представить в виде сумм двух слагаемых:

$$\Delta y_1 = (C_1 - A_1) + (B_1 - C_1); \quad \Delta y_2 = (C_2 - A_2) + (B_2 - C_2) \qquad (1)$$

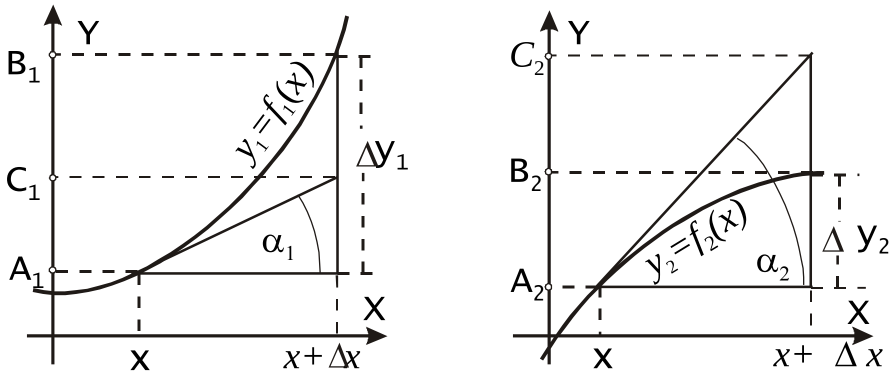


Рис.3

Первые слагаемые в правых частях обоих выражений (1) легко вычисляются из сходных формул: $C_1 - A_1 = \mathrm{tg}\alpha_1\, \Delta x = f_1{}'(x)\Delta x$; $C_2 - A_2 = \mathrm{tg}\alpha_2\, \Delta x = f_2{}'(x)\Delta x$.

Величина $f'(x)\,\Delta x$ называется главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке $x$. (Здесь мы говорим только о функции, имеющей в точке $x$ производную). Главная часть приращения функции линейна относительно приращения аргумента $\Delta x$ (можно сказать – пропорциональна приращению $\Delta x$). Это означает, что если приращение аргумента $\Delta x$ уменьшить в $k$ раз, то и главная часть приращения функции уменьшится в $k$ раз.

Формулы (1) можно переписать в виде:

$$\Delta y_1 = f_1{}'\Delta x + r_1; \quad \Delta y_2 = f_2{}'\Delta x + r_2. \qquad (2)$$

Здесь $r_1 = B_1 - C_1$; $r_2 = B_2 - C_2$.

Величины $r_1$ и $r_2$ в формулах (2) при уменьшении $\Delta x$ в $k$ раз уменьшаются более чем в $k$ раз, что можно видеть, сравнивая рисунки 3 и 4, и говорят, что $r_1$ и $r_2$ стремятся к нулю быстрее, чем $\Delta x$ .

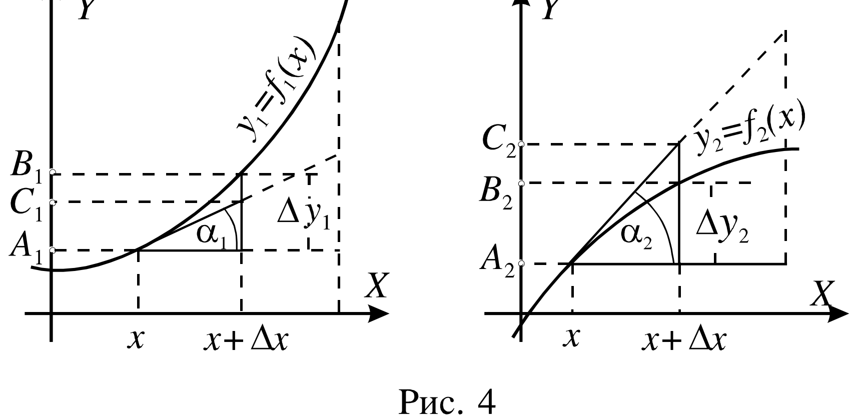


Рис. 4

Назовем функцию $\beta(z)$ **бесконечно малой** в точке $z = z_0$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \beta(z) = 0$.

Пусть функции $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ являются бесконечно малыми в точке $z = z_0$.. Функция $\beta(z)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\gamma(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\beta(z)}{\gamma(z)} = 0$.

Величины $r_1$ и $r_2$ в формулах (2) являются функциями аргумента $\Delta x$, бесконечно малыми в точке $\Delta x = 0$. Можно показать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{r_i(\Delta x)}{\Delta x} = 0; \; i = 1{,}2$.

Это означает, что **функции** $r_1(\Delta x)$ и $r_2(\Delta x)$ **являются бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем** $\Delta x$, **в точке** $\Delta x = 0$.

Таким образом приращение функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке, в которой существует её производная, может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\Delta x$, в точке $\Delta x = \mathbf{0}$.

Главная, линейная относительно $\Delta x$, часть приращения функции $y = f(x)$, равная $f'(x)\,\Delta x$, называется **дифференциалом** и обозначается $dy$:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \qquad (3)$$

Если сюда подставить функцию $f(x) = x$, то, так как $x' = 1$, формула (3) примет вид: $dx = \Delta x$. Эта формула легко истолковывается с помощью графика функции $y = x$, из которого видно, что приращение этой функции содержит лишь главную часть. Таким образом, для функции $y = x$ приращение совпадает с дифференциалом. Теперь формулу дифференциала (3) можно переписать так

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть **производная функции $f(x)$ равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента $x$**.

Очевидны следующие свойства дифференциала.

1. $dC = 0$ ( здесь и в следующей формуле $C$ – постоянная );

2. $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

3. Если существуют $df(x)$ и $dg(x)$, то $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$, $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$. Если при этом $g(x) \neq 0$, то $d\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Пусть $y = f(x)$ - функция, имеющая производную в точке $x$, тогда $dy = df(x) = f'(x)dx$. Если аргумент $x$ является функцией $x(t)$ некоторой независимой переменной $t$, то $y = F(t) = f(x(t))$ –сложная функция от $t$, и её дифференциал вычисляется по формуле $dy = F'(t)dt = f'(x)x'(t)dt$. Однако по определению дифференциала $x'(t)dt = dx$ и последняя формула преобразуется к виду: $dy = f'(x)dx$.

Таким образом если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента так, что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством **инвариантности дифференциала**.

## §5. Производные высших порядков.

Может оказаться что функция $f'(x)$, называемая первой производной, тоже имеет производную $(f'(x))'$. Эта производная называется **второй производной** функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Если $f$ есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени $t$ равна $f'(t)$, а ускорение равно $f''(t)$.

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется **третьей производной** функции $f(x)$ и обозначается $f'''(x)$.

Если определена $n$-я производная $f^{(n)}(x)$ и существует её производная, то она называется $(n+1)$-й производной функции $f(x)$: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

Все производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков.**