

## §6. Формула Лагранжа

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке  $[a, b]$  и дифференцируема на открытом промежутке  $(a, b)$ , то можно найти такую точку  $c$ , принадлежащую промежутку  $(a, b)$ , для которой справедливо равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

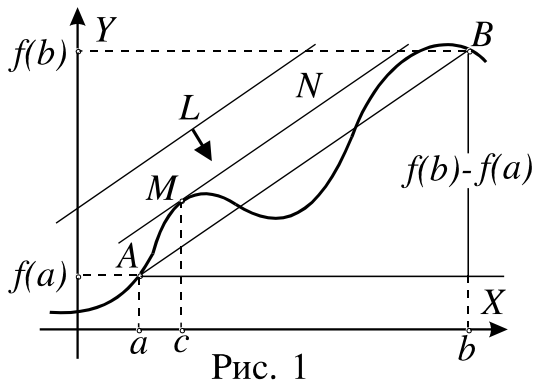


Рис. 1

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа. Проведем наглядное обоснование этой формулы. Возьмем на графике функции  $f(x)$  точки  $A(a; f(a))$  и  $B(b; f(b))$ . Проведем через эти точки прямую  $AB$ . Проведем также прямую  $L$ , параллельную прямой  $AB$ , так, чтобы она не пересекала график функции  $f(x)$  на промежутке  $(a, b)$ . Сохраняя параллельность  $L$  и  $AB$ , будем

"надвигать" прямую  $L$  на график  $f(x)$  до тех пор, пока прямая  $L$  не коснется графика  $f(x)$  в некоторой точке  $c$  промежутка  $(a, b)$ . Геометрическую точку касания обозначим буквой  $M$ , а через  $MN$  обозначим касательную к графику  $f(x)$ , параллельную прямой  $AB$ . Очевидно, угловые коэффициенты прямых  $MN$  и  $AB$  (то есть тангенсы углов наклона прямых к оси абсцисс) равны. Угловым коэффициентом прямой  $MN$  равен  $f'(c)$ , а угловым коэффициентом прямой  $AB$  равен  $(f(b) - f(a))/(b - a)$ , и справедлива формула:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда сразу получается формула (1). На приведенном рисунке видно, что могут существовать другие точки, принадлежащие промежутку  $(a, b)$ , в которых касательные к графику функции  $f(x)$  параллельны прямой  $MN$ . Производную функции  $f(x)$ , вычисленную в любой из этих точек, можно подставить в правую часть формулы (1) вместо множителя  $f'(c)$ .

Сформулируем теорему о монотонности функции. Если  $f'(x) > 0$  на промежутке  $(a;b)$ , то на  $(a;b)$  функция  $f(x)$  возрастает. Если  $f'(x) < 0$  на промежутке  $(a;b)$ , то на  $(a;b)$  функция  $f(x)$  убывает.

Докажем эту теорему. Пусть  $t_1$  и  $t_2$  — любые числа из промежутка  $(a;b)$ , причем  $t_2 > t_1$ . Тогда по теореме Лагранжа можно указать такое число  $c$  из промежутка  $(t_1;t_2)$ , для которого справедливо равенство  $f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$ . Если  $f'(x) > 0$  для всех  $x$  из промежутка  $(a;b)$ , то  $f'(c) > 0$ , и из условия  $t_2 > t_1$  следует, что  $f(t_2) - f(t_1) > 0$ . Таким образом, возрастание функции  $f(x)$  на промежутке  $(a;b)$  доказано. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

## §7. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Точка  $x_0$  называется **точкой минимума** функции  $f(x)$ , если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки  $x$  из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0).$$

Точка  $x_0$  называется **точкой максимума** функции  $f(x)$ , если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки  $x$  из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) < f(x_0).$$

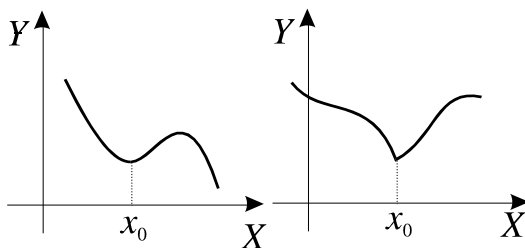


Рис. 1

Примеры точек минимума.

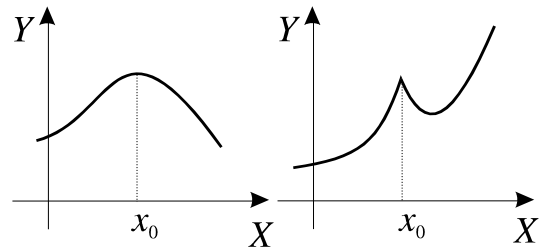


Рис. 2

Примеры точек максимума.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Сформулируем теорему о необходимом условии экстремума функции: **если в точке экстремума функция  $f(x)$  имеет производную, то производная равна нулю.**

Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать среди тех точек её области определения, где производная функции равна нулю или не существует.

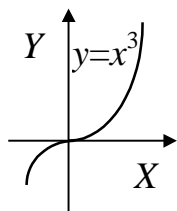


Рис. 3

Если  $f'(x_0) = 0$ , это еще не значит, что в точке  $x_0$  есть экстремум. Примером может служить функция  $y=x^3$ . В точке  $x=0$  её производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рисунке 3.

Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной**.

Точки области определения функции, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими**.

Как было показано выше, с помощью необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума, тем более указать, какой экстремум реализуется – максимум или минимум. Для того, чтобы ответить на эти вопросы, сформулируем и докажем теорему, которая называется **достаточным условием экстремума**.

**Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Тогда:**

1) **если  $f'(x) < 0$  на  $(a;x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на  $(x_0;b)$ , то точка  $x_0$  – точка минимума функции  $f(x)$ ;**

2) **если  $f'(x) > 0$  на  $(a;x_0)$  и  $f'(x) < 0$  на  $(x_0;b)$ , то точка  $x_0$  – точка максимума функции  $f(x)$ ;**

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как  $f'(x) < 0$  на  $(a;x_0)$  и  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $f(x)$  убывает на  $(a;x_0]$ , и для любого  $x \in (a;x_0)$  выполняется условие  $f(x) > f(x_0)$ .

Так как  $f'(x) > 0$  на  $(x_0;b)$  и  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $f(x)$  возрастает на  $(x_0;b]$ , и для любого  $x \in (x_0;b)$  выполняется условие  $f(x) > f(x_0)$ .

В результате получается, что при любом  $x \neq x_0$  из  $(a;b)$  выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ , то есть точка  $x_0$  – точка минимума  $f(x)$ .

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

## §8. Выпуклость и вогнутость функции

Пусть функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке промежутка  $(a;b)$ . Если на промежутке  $(a;b)$  график функции  $f(x)$  расположен выше любой своей

касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **вогнутой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вниз").

Если на промежутке  $(a;b)$  график функции  $f(x)$  расположен ниже любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **выпуклой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вверх").

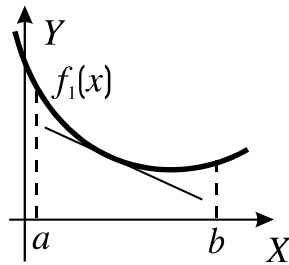


Рис.1

Функция  $f_1(x)$  вогнута на промежутке  $(a;b)$

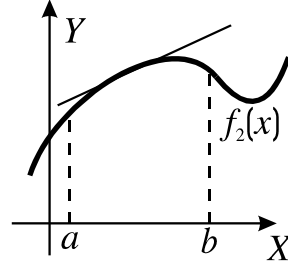


Рис. 2

Функция  $f_1(x)$  выпукла на промежутке  $(a;b)$

Точка  $x_0$  называется **точкой перегиба** функции  $f(x)$ , если в этой точке функция имеет производную и существуют два промежутка:  $(a;x_0)$  и  $(x_0;b)$ , на одном из которых функция выпукла, а на другом вогнута.

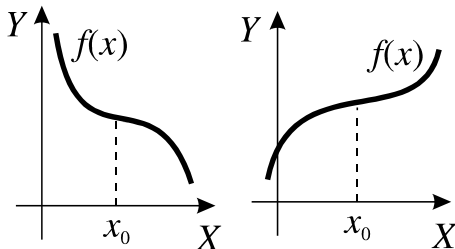


Рис. 3

Примеры точек перегиба.

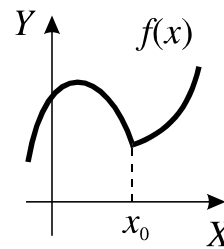


Рис..4

Угловая точка не является точкой перегиба.

Будем называть функцию **возрастающей в точке**  $x_0$ , если она непрерывна в этой точке и возрастает в некоторой ее окрестности. Подобным образом можно определить функцию, убывающую в точке.

Приведем без доказательства важную для исследования функций теорему.

**Если  $f''(x) > 0$  на промежутке  $(a;b)$ , то на этом промежутке функция  $f(x)$  вогнута. Если  $f''(x) < 0$  на промежутке  $(a;b)$ , то на этом промежутке функция  $f(x)$  выпукла.**

Из положительности второй производной функции на промежутке следует возрастание первой производной на этом промежутке, а это, как показано на рисунке 5, – признак вогнутой функции. Аналогичным образом иллюстрируется второе утверждение теоремы.

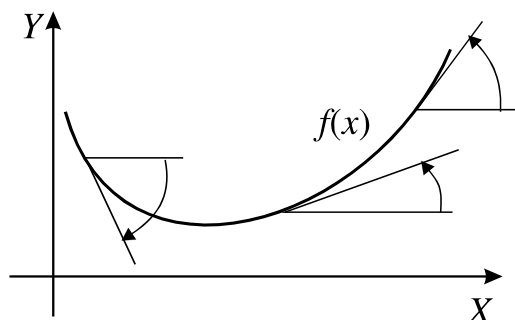


Рис. 5  
Вогнутая функция.  
Тангенс угла наклона  
касательной возрастает.

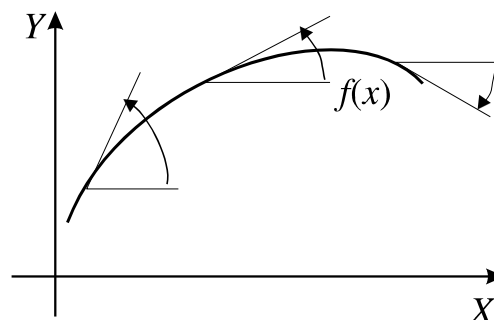


Рис. 6  
Выпуклая функция.  
Тангенс угла наклона  
касательной убывает.

Если  $x_0$  – точка перегиба функции  $f(x)$ , то  $f''(x_0) = 0$ .

Приведем другую формулировку достаточных условий экстремума функции.

Если в точке  $x_0$  выполняются условия:

1)  $f'(x_0) = 0$ ;  $f''(x_0) < 0$ , тогда  $x_0$  – точка максимума;

2)  $f'(x_0) = 0$ ;  $f''(x_0) > 0$ , тогда  $x_0$  – точка минимума;

3)  $f'(x_0) = 0$ ;  $f''(x_0) = 0$ , тогда вопрос о поведении функции в точке остается открытым. Здесь может быть экстремум, например в точке  $x_0 = 0$  у функции  $y = x^4$ , но может его не быть, например в точке  $x_0 = 0$  у функции  $y = x^5$ . В этом случае для решения вопроса о наличии экстремума в стационарной точке можно использовать достаточные условия экстремума, приведенные выше.

Рассмотрим пример из микроэкономики.

В количественной теории полезности предполагается, что потребитель может дать количественную оценку (в некоторых единицах измерения) полезности любого количества потребляемого им товара.

Это означает существование **функции полезности**  $TU$  аргумента  $Q$  – количества купленного товара. Введём понятие **предельной полезности**, как добавочной полезности, прибавляемой каждой последней порцией товара. Далее построим двумерную систему координат, откладывая по горизонтальной оси

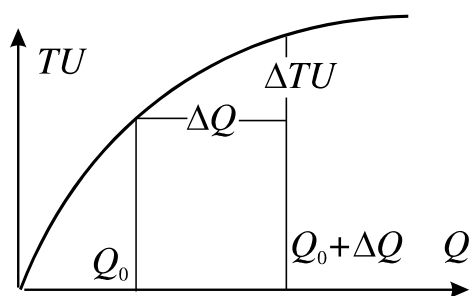


Рис. 7

количество потребляемого товара  $Q$ , а по вертикальной оси – общую полезность  $TU$ , как это сделано на рисунке 7. В этой системе координат проведем график функции  $TU = TU(Q)$ . Точка  $Q_0$  на горизонтальной оси означает количество приобретенного товара, величина  $\Delta Q$  – добавочный приобретенный товар. Разность  $\Delta TU = TU(Q_0 + \Delta Q) - TU(Q_0)$  – добавочная полезность, полученная от покупки “довеска”  $\Delta Q$ . Тогда добавочная полезность от последней приобретенной порции (или единицы количества) товара вычисляется по формуле  $\Delta TU / \Delta Q$  (Курс экономической теории. Под общей редакцией проф. Чепурина М.Н. 1995, стр. 122). Эта дробь, как можно видеть, зависит от величины  $\Delta Q$ . Если здесь перейти к пределу при  $\Delta Q \rightarrow 0$ , то получится формула для определения предельной полезности  $MU$ :

$$MU = \frac{dTU}{dQ}.$$

Это означает, что **предельная полезность равна производной функции полезности  $TU(Q)$** . **Закон убывающей предельной полезности** сводится к уменьшению этой производной с ростом величины  $Q$ . Отсюда следует выпуклость графика функции  $TU(Q)$ . Понятие функции полезности и представление предельной полезности в виде производной этой функции широко используется в математической экономике.