§9. Неопределенный интеграл.

Функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, если для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции x^2 первообразной будет функция $x^3/3$.

Если для $F(x)$ установлено равенство $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, так как $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Рассмотрим две теоремы, которые называются теоремами об общем виде всех первообразных данной функции.

Теорема 1. **Если** $F(x)$ – **первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$, **то** $F(x) + C$, **где** C – **число**, **тоже первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$.

Доказательство.

$$(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$$

По определению $F + C$ — первообразная для f.

Прежде чем рассмотреть теорему 2, докажем две вспомогательные теоремы.

Если функция $g(x)$ **постоянна на** $(a;b)$, **то** $g'(x) = 0$.

Доказательство.

Так как $g(x) = C$, справедливы равенства: $g'(x) = C' = 0$ (здесь, как и ниже, через C обозначено произвольно выбранное число).

Если $g'(x) = 0$ **при всех** $x \in (a;b)$, **то** $g(x) = C$ **на** $(a;b)$.

Доказательство.

Пусть $g'(x) = 0$ во всех точках $(a;b)$. Зафиксируем точку $x_1 \in (a;b)$. Тогда для любой точки $x \in (a;b)$ по формуле Лагранжа имеем

$$g(x) - g(x_1) = g'(\xi)(x - x_1)$$

Так как $\xi \in (x; x_1)$, а точки x и x_1 принадлежат промежутку $(a;b)$, то $g'(\xi) = 0$, откуда следует, что $g(x) - g(x_1)=0$, то есть $g(x) = g(x_1)=const$.

Теорема 2. **Если** $F(x)$ **есть первообразная для** $f(x)$ **на промежутке** $(a;b)$, **а** $G(x)$ – **другая первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$, **то** $G = F + C$, **где** C – **число**.

Доказательство.

Возьмем производную от разности $G – F$: $(G – F)' = G' – F' =$ $= f – f = 0$. Отсюда следует: $G – F = C$, где C — число, то есть $G = F + C$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольное число.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется **интегрированием**.

Из определения неопределенного интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ интегрального исчисления. Отсюда получается **таблица неопределенных интегралов**:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq 1)$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int e^{x}dx = e^{x}+C$;

5) $\int a^{x}dx = a^{x}\log_{a}e + C$ $(\alpha \neq 1)$;

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$;

10) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg}\, x + C =$ $= -\mathrm{arcctg}\, x + C$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$;

12) $\int \frac{dx}{x(a-x)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-x}\right| + C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$;

2) $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$;

3) $d \int f(x)\, dx = f(x)dx$;

4) $\int d\, f(x) = f(x) + C$;

5) $\int kf(x)dx = k\int f(x)\, dx$;

6) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$;

7) Если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

$(a \neq 0)$.

Все эти свойства непосредственно следуют из определения.

§10. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Можно привести примеры вычисления интеграла с помощью перехода от левой части к правой в этой формуле, а можно привести примеры обратного перехода.

Примеры. 1. $I = \int \cos(t^3)\, t^2\, dt.$ Пусть $t^3 = x$, тогда $dx = 3t^2dt$ или $t^2dt = dx/3$.

$$I = \int \cos x \frac{dx}{3} = \frac{1}{3}\int \cos x dx = \frac{1}{3}\sin x + C = \frac{1}{3}\sin t^3 + C\,.$$

2. $I = \int \dfrac{\ln^2 t + \sqrt{\ln t}}{t}\, dt$. Пусть $\ln t = x$, тогда $dx = dt/t$.

$$I = \int \left(x^2 + \sqrt{x}\right)dx = \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C =$$

$$= \frac{\ln^3 t}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln t}\right)^3 + C.$$

3. $I = \int \mathrm{tg} t dt = \int \dfrac{\sin t}{\cos t}\, dt$. Пусть $x = \cos t$, тогда $dx = -\sin t\, dt$, и

$$I = \int \frac{-dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C = -\ln|\cos t| + C\,.$$

4. $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Пусть $x = \sin t$, тогда $dx = \cos dt$, и

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int dt = t + C = \arcsin x + C\,.$$

§11. Формула интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Отсюда следует

$$\int (uv)'dx = \int (u'v + v'u)dx = \int u'v\,dx + \int v'u\,dx$$

или

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx\,.$$

Отсюда следует формула, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)du(x)$$

Приведем примеры применения формулы интегрирования по частям.

Примеры. 1. $I = \int x\cos x\,dx$. Пусть $u = x$; $dv = \cos x\,dx$, тогда $du = dx$; $v = \sin x$. Отсюда по формуле интегрирования по частям получается:

$$I = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2. $I = \int (x^2 - 3x + 2)\,e^{5x}dx.$ Пусть $x^2 - 3x + 2 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Тогда $du = (2x - 3)\,dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$.

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 5x + 2\right) - \frac{1}{5}\int (2x-3)e^{5x}dx.$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям, полагая $2x - 3 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Отсюда следует: $du = 2dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$, и окончательно получаем:

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}(2x-3) - \frac{1}{5}\int e^{5x}2dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{25}e^{5x}(2x-3) - \frac{2}{25}e^{5x} + C.$$

3. $I=\int\left(x^5+\sqrt{x}\right)\ln x dx$;

$$\ln x=u;\left(x^5+\sqrt{x}\right)dx=dv;\ \frac{dx}{x}=du;\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=v;$$

$$I=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\frac{x^5}{6}dx-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\ln x-\frac{x^6}{36}-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

В заключение покажем метод вычисления неопределенного интеграла, стоящего в приведенной выше таблице под номером 12:

$$I=\int\frac{dx}{x(a-x)}.$$

Представим дробь $\frac{1}{x(a-x)}$ в виде суммы двух дробей: $\frac{A}{x}$ и $\frac{B}{a-x}$, и попытаемся найти неизвестные величины параметров A и B. Из равенства $\frac{1}{x(a-x)}=\frac{(B-A)x+aA}{x(a-x)}$ получим систему уравнений

$$\begin{cases}B-A=0\\ aA=1\end{cases}$$

с решением $A=\frac{1}{a};B=\frac{1}{a}$. Отсюда следует:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{a-x}=\frac{1}{a}\left(\ln|x|-\ln|a+x|\right)+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-x}\right|+C.$$

Полученный интеграл в обиходе обычно называют “высоким логарифмом”. Метод, которым он был найден, называется методом “неопределенных коэффициентов”. Этот метод применяется при вычислении интегралов от дробей с числителем и знаменателем в виде многочленов.