§12. Определенный интеграл

Пусть на промежутке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Будем считать функцию непрерывной, хотя это не обязательно. Выберем на промежутке $[a;b]$ произвольные числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющие условию: $a < x_1, < x_2 < \ldots < x_{n-1}, < b$. Эти числа разбивают промежуток $[a;b]$ на n более мелких промежутков: $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};b]$. На каждом из этих промежутков выберем произвольно по одной точке: $c_1 \in [a;x_1]$, $c_2 \in [x_1;x_2]$, …, $c_n \in [x_{n-1};b]$.

Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$; $\Delta x_2 = x_2 - x_1$; …, $\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,.$$

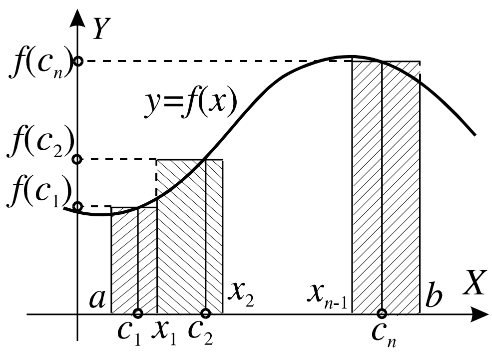

Рис. 1

Она называется **интегральной** суммой функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит от способа разбиения промежутка и от выбора точек c_i.

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника, покрытого штриховкой на рисунке 1.

Введем обозначение: $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.. Величину λ иногда называют **параметром разбиения**.

Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю. **Определенным интегралом**

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при этом процессе, если предел существует:

$$I = \lim_{n\to\infty;\lambda\to 0} \sigma.$$

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения промежутка $[a;b]$ и выбора точек c_i.

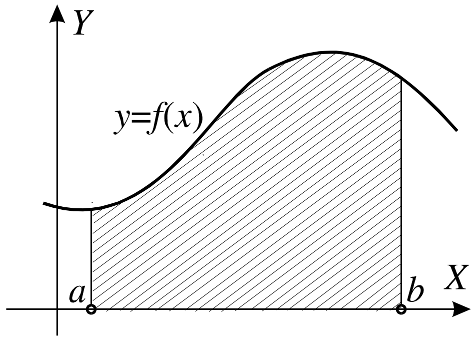

Рис. 2

Число a называется **нижним пределом интегрирования**, а число b — **верхним пределом интегрирования**.

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной, неотрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси X, и прямыми $x=a$; $x=b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией. На рисунке 2 криволинейная трапеция выделена штриховкой. Площадь S этой трапеции определяется формулой

$$S = I = \int_a^b f(x)dx.$$

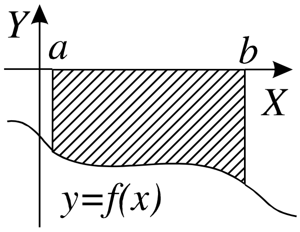

Рис. 3

Если $f(x) < 0$ во всех точках промежутка $[a;b]$ и непрерывна на этом промежутке (например, как изображено на рисунке 3), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a;b]$ горизонтальной оси координат, прямыми $x=a$; $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$, определяется формулой

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Перечислим свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (здесь k - произвольное число);

2) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) Если $c\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Из этих свойств следует, например, что $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$.

Все приведенные выше свойства непосредственно следуют из определения определенного интеграла.

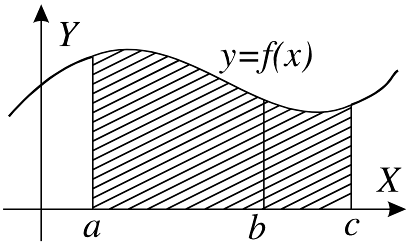

Рис. 4

Оказывается, что формула из пункта 4 справедлива и тогда, когда $c \notin [a;b]$. Пусть, например, $c>b$, как изображено на рисунке 4. В этом случае верны равенства

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^c - \int\limits_b^c = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b .$$

§13. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, содержащем точку a. Тогда каждому числу x из этого промежутка можно поставить в соответствие число

$$I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt ,$$

определив тем самым на промежутке функцию $I(x)$, которая называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. Отметим, что в

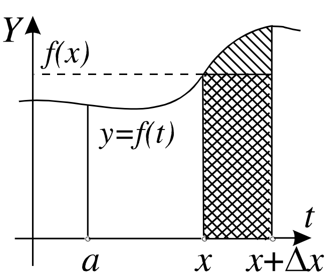

Рис. 1

точке $x = a$ эта функция равна нулю. Вычислим производную этой функции в точке x. Для этого сначала рассмотрим приращение функции в точке x при приращении аргумента Δx:

$$\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) =$$

$$= \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt .$$

Как показано на рисунке 1, величина последнего интеграла в формуле для приращения $\Delta I(x)$ равна площади криволинейной трапеции, отмеченной штриховкой. При малых величинах Δx (здесь, так же как и везде в этом курсе, говоря о малых величинах приращений аргумента или функции, имеем в виду абсолютные величины приращений, так как сами приращения могут быть и положительными и отрицательными) эта площадь оказывается приблизительно равной площади прямоугольника, отмеченного на рисунке двойной штриховкой. Площадь прямоугольника определяется формулой $f(x)\Delta x$. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta I(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \approx f(x)\Delta x.$$

В последнем приближенном равенстве точность приближения тем выше, чем меньше величина Δx.

Из сказанного следует формула для производной функции $I(x)$:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

Производная определенного интеграла по верхнему пределу в точке x **равна значению подынтегральной функции в точке** x. Отсюда следует, что функция $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$, причем такой первообразной, которая принимает в точке $x = a$ значение, равное нулю. Этот факт дает возможность представить определенный интеграл в виде

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = I(x) - I(a). \qquad (1)$$

Пусть $F(x)$ тоже является первообразной для функции $f(x)$, тогда по теореме об общем виде всех первообразных функции $I(x) = F(x) + C$, где C — некоторое число. При этом правая часть формулы (1) принимает вид

$$I(x) - I(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) после замены x на b следует формула для вычисления определенного интеграла от функции $f(t)$ по промежутку $[a;b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

которая называется формулой **Ньютона-Лейбница**. Здесь $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и подсчитать разность значений первообразной в точках b и a. Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$.

Приведем примеры вычисления определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Примеры. 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

2. $I = \int_0^1 xe^x dx$.

Сначала вычислим неопределенный интеграл от функции $f(x) = xe^x$. Используя метод интегрирования по частям, получаем: $\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$. В качестве первообразной функции $f(x)$ выберем функцию $e^x(x-1)$ и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = e^x(x-1)\Big|_0^1 = 1.$$

При вычислении определенных интегралов можно применять **формулу замены переменной в определенном интеграле**:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\ \ (t))\ \ '(t)dt.$$

Здесь α и β определяются, соответственно, из уравнений $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, а функции f, φ, φ' должны быть непрерывны на соответствующих промежутках.

Пример: $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}$.

Сделаем замену: $\ln x = t$ или $x = e^t$, тогда если $x = 1$, то $t = 0$, а если $x = e$, то $t = 1$. В результате получим:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln e^t e^t dt}{e^t} = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

При замене переменной в определенном интеграле не нужно возвращаться к исходной переменной интегрирования.

§14. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Если положить промежуток интегрирования бесконечным, то приведенное выше определение определенного интеграла теряет смысл, например, потому что невозможно осуществить условия $n\to\infty$; $\lambda\to 0$ для бесконечного промежутка. Для такого интеграла требуется специальное определение.

Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ определена и непрерывна на полубесконечном промежутке $[a;\infty)$, тогда **несобственным интегралом с бесконечным пределом** $\int_a^\infty f(x)dx$ называется $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, если предел существует. Если этот предел не существует, то не существует и несобственный интеграл. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл **расходится**. При существовании предела говорят, что несобственный интеграл **сходится.**

Аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\right).$$

Примеры: 1. $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Очевидно: $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$, откуда следует

$$I = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

2. $I = \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_4^b = \lim\limits_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b} - 2\right)$; этот предел не существует, следовательно, не существует или расходится интеграл I.

3. $I = \int_e^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln b - 1\right)$; здесь предел также не существует, и интеграл расходится.

Упражнения

1. Найти производные от следующих функций:

1) $y = x^6 - 3x^5 + 2x^2 + 1$;

2) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$;

3) $y = 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-3}$;

3) $y = \left(x^2 - 2x + 2\right)2^x$;

5) $y = 5\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x$;

6) $y = x \arcsin x$;

7) $y = 2t\sin t - \left(t^2 - 2\right)\cos t$;

8) $y = \log_7 x \cdot \operatorname{arcctg} x$;

9) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x - 5}$;

10) $y = \dfrac{x^5}{6^x}$;

11) $y = \left(1 + x^3\right)\left(5 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ где $x = 1$;

12) $y = \dfrac{\arccos x}{x^9}$;

13) $y = \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ где $t = \pi / 6$;

14) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

15) $y = \dfrac{e^x + \sin x}{xe^x}$;

16) $y = 7^x \arccos x$.