Глава 3. Функция нескольких переменных

§1. Основные понятия

Пусть имеется n+1 переменная x_1, x_2, ..., x_n, y, которые связаны между собой так, что каждому набору числовых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n соответствует единственное значение переменной y. Тогда говорят, что **задана функция *f* от *n* переменных**. Число y, поставленное в соответствие набору x_1, x_2, ..., x_n называется значением функции f в точке (x_1, x_2, ..., x_n), что записывается в виде формулы $y = f(x_1,x_2,..., x_n)$ или $y = y(x_1,x_2,..., x_n)$.

Переменные x_1, x_2, ..., x_n являются аргументами этой функции, а переменная y - функцией от n переменных.

Далее будем говорить лишь о функции двух переменных. Для функций большего числа переменных все факты, о которых будет идти речь, или аналогичны или сохраняются без всякого изменения. Аргументы функции двух переменных будем обозначать как правило x и y, а значение функции – z.

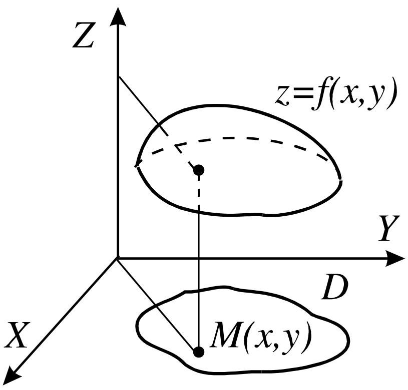

Рис. 1

Будем говорить, что задана **функция двух переменных**, если любой паре чисел (x,y) из некоторого множества D упорядоченных пар чисел поставлено в соответствие единственное число, которое обозначается $f(x,y)$ и называется значением функции f в точке (x,y).

Множество D называется **областью определения** функции.

Поскольку любую пару чисел x,y можно рассматривать как пару координат точки M на плоскости, вместо $z=f(x,y)$ можно писать $z=f(M)$.При этом аргументами функции будут координаты x,y точки M.

Числа x,y можно рассматривать как координаты вектора $\bar{r}$, исходящего из начала координат и с концом в точке $M(x,y)$. Тогда функция двух переменных будет функцией вектора, что записывается в виде формулы $z = f(\bar{r})$, причем аргументами функции являются координаты вектора $\bar{r}$.

График функции двух переменных есть множество точек (x,y,$f(x,y)$), где $(x,y)\in D$. График представляет собой некоторую поверхность. Пример такой поверхности приводится на рисунке 1.

Очевидно, что нельзя ввести понятия возрастания или убывания (монотонности) функции двух переменных. Рассмотрим график некоторой функции $z=f(x,y)$, изображенный на рисун-ке 2. Из точки $M(x,y)$ в плоскости X,Y проведем два луча l_1 и l_2 , определяющих некоторые направления. Можно говорить, что в точке M функция f в направлении l_1 возрастает, а в направлении l_2 убывает. Это означает, что для любой точки M_1 , лежащей на луче l_1 достаточно близко к точке M, выполняется неравенство $f(M_1) > f(M)$. Для любой точки M_2 , лежащей на луче l_2 достаточно близко к точке M, выполняется неравенство $f(M_2) < f(M)$.

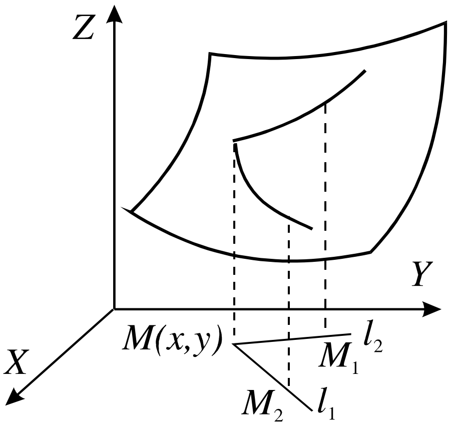

Рис. 2.

Одним из подходов к исследованию функций двух переменных является изучение поведения функции в точке, то есть определение направлений, в которых функция убывает или возрастает, и определение скорости возрастания или убывания.

Можно использовать другой подход. Пусть имеется функция $z = f(x,y)$ с графиком, представляющим собой некоторую поверхность.

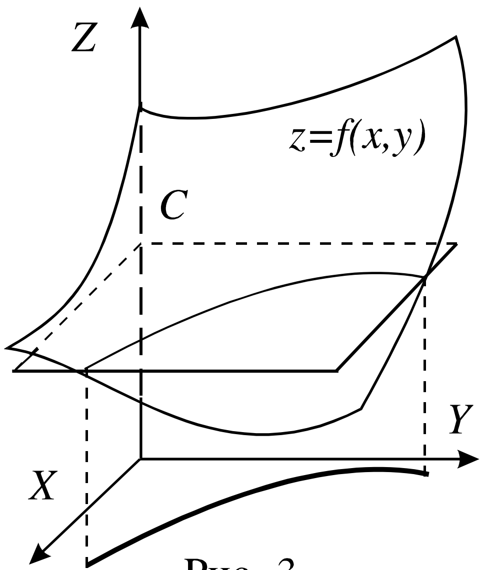

Рис. 3.

Рассмотрим сечение графика функции плоскостью $z=C$ (эта плоскость параллельна плоскости XOY и пересекает ось Z в точке $z=C$). Спроектируем линию пересечения этой плоскости с поверхностью $z = f(x,y)$ на плоскость XOY и получим так называемую линию уровня C функции $z = f(x,y)$. Линия уровня представляет собой множество всех точек в плоскости XOY, для которых выполняется равенство $f(x,y) = C$. Придавая различные значения параметру C, можно получить множество линий уровня функции $f(x,y)$. Если для каждой линии уровня указать соответствующее ей значение C, то получится топографическая карта поверхности, представляющей собой график функции.

В микроэкономике, в предположении что потребитель приобретает лишь два вида товаров: A и B, вводится понятие общей полезности TU, как функции двух аргументов: Q_1 и Q_2 – количеств потребленных товаров A и B, соответственно:

$$TU = TU(Q_1,Q_2). \qquad (1)$$

Очевидно, что все линии уровня функции $TU(Q_1,Q_2)$ составляют семейство **кривых безразличия** (Курс экономической теории. Под общей редакцией проф. Чепурина М.Н. 1995, стр. 125).

Пусть в плоскости XOY заданы две точки: $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$. **Расстояние** ρ между этими точками рассчитывается по формуле

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,. \qquad (2)$$

Пусть δ - некоторое положительное число. **δ-окрестностью** V_δ точки $M_0(x_0,y_0)$ называется множество всех точек, координаты x,y которых удовлетворяют неравенствам

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\,.$$

Очевидно, что δ-окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$ представляет собой круг радиуса δ с выколотым центром.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется **точкой минимума** функции $z = f(x,y)$, если существует такое положительное число δ, что из условия $M(x,y) \in V_\delta\ (x_0,y_0)$ следует $f(x,y) > f(x_0,y_0)$.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x,y)$, если существует такое положительное число δ, что из условия $M(x,y) \in V_\delta\ (x_0,y_0)$ следует: $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

Точки минимума и максимума называются **точками экстремума**.

Число A называется **пределом функции** $z = f(x,y)$ **в точке** $M_0(x_0,y_0)$:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \Leftrightarrow A = \lim_{M \to M_0} f(M),$$

если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек $M(x,y)$ из δ-окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon\,.$$

Функция $z = f(x,y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0,y_0)$, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Два последних определения фактически повторяют определения предела и непрерывности в точке для функции одной переменной.

§2. Частные производные

Частной производной по x **функции** $z = f(x,y)$ **в точке** $M_0(x_0,y_0)$ **называется предел**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует. Обозначается эта частная производная любым из следующих символов:

$$f'_x(M_0);\ f'_x(x_0, y_0);\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Частная производная по x есть обычная производная от функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция только от переменной x при фиксированном значении переменной y.

Совершенно аналогично можно определить **частную производную по** y **функции** $z = f(x,y)$ **в точке** $M_0(x_0,y_0)$:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

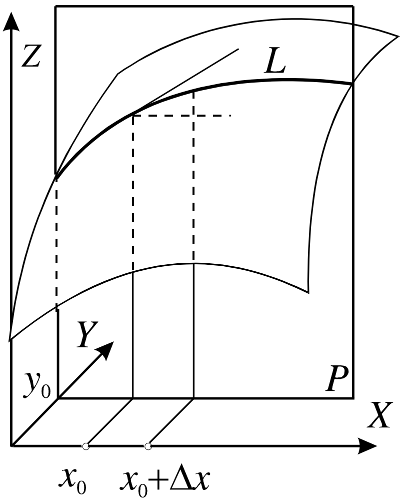

Рис. 1

В пространстве XYZ условие $y = y_0$ описывает плоскость P, перпендикулярную оси OY и пересекающую эту ось в точке y_0. Плоскость P пересекается с графиком функции $z = f(x,y)$, вдоль некоторой линии L, как показано на рисунке 1. Тангенс угла между плоскостью XOY и касательной к линии L в точке с координатами x_0,y_0 равен частной производной по x функции $z = f(x,y)$ в этой точке. В этом состоит геометрический смысл частной производной.

Аналогичное заключение можно сделать относительно частной производной по y.

Приведем примеры вычисления частных производных. Как говорилось выше, для вычисления частной производной по x функции $z = f(x,y)$ нужно положить переменную y равной константе, а при нахождении частной производной по y нужно считать константой переменную x.

Примеры. 1. $z = x^2 y + \sqrt{x}; \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2.$

2. $z(x,y) = e^{\frac{x}{y}}; \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$

Если частные производные функции $z = f(x,y)$ существуют на некотором множестве, а точка, в которой вычисляются частные производные несущественна, то пользуются более короткими обозначениями:

$$z'_x; z'_y; f'_x; f'_y; \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Сами частные производные могут являться функциями от нескольких переменных на некотором множестве. У этих функций тоже могут существовать частные производные по x и по y. Они называются **вторыми частными производными** или **частными производными второго порядка** и обозначаются z_{xx}'', z_{yy}'', z_{xy}'' или $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Согласно определению $z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x$;

$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y$. Последняя частная производная второго порядка называется смешанной. Смешанная частная производная второго порядка, вообще говоря, зависит от того, в какой последовательности берутся переменные, по которым вычисляется производная. Так, производная $z_{xy}'' = (z_x')_y'$ может не быть равной $z_{yx}'' = (z_y')_x'$. Однако существует теорема, утверждающая, что **если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они не зависят от того, в какой последовательности вычислялись частные производные по *x* и по *y***. (Рекомендуем читателю самому убедиться в справедливости этой теоремы для функций, рассмотренных в приведенных выше примерах 1 и 2.)

Отметим очень важное отличие функции двух переменных от функции одной переменной. Из существования первых частных производных в точке не следует непрерывность функции в этой точке. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ при } xy = 0 \\ 1 \text{ при } xy \neq 0 \end{cases}.$$

График этой функции во всех точках, не принадлежащих осям координат *OX* и *OY*, представляет собой плоскость, параллельную плоскости *XOY*, поднятую на 1. Сами эти оси координат также принадлежат графику рассматриваемой функции. Очевидно, что в точке (0,0) функция имеет частные производные по обоим аргументам, обе равные нулю. Очевидно также, что в любой окрестности точки (0,0) можно найти точку *M* такую, что $f(M) = 1$, в то время как $f(0, 0) = 0$. Это означает существование разрыва функции в точке (0,0). (Пример взят из книги О.С.Ивашева-Мусатова “Начала математического анализа”).