

§4. Производная по направлению.

Пусть в плоскости XOY расположена точка $M_0(x_0, y_0)$. Зададим произвольный угол α и рассмотрим множество точек на той же плоскости, координаты которых определяются из формул

$$x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \sin \alpha. \quad (1)$$

Здесь t - параметр, который может быть равен любому числу. Из формул (1) следует:

$$(y - y_0)/(x - x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Это означает, что все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют равенствам (1), лежат на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и составляющей угол α с осью OX . Каждому значению t соответствует единственная точка $M(x, y)$, лежащая на этой прямой, причем согласно формуле (1) из §1 расстояние между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ равно t . Можно считать эту прямую числовой осью с положительным направлением, определяемым возрастанием параметра t . Обозначим положительное направление этой оси символом l .

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению l называется число

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}. \quad (2)$$

Производной функции по направлению можно дать геометрическую интерпретацию. Если через прямую l , определяемую формулами (1), провести вертикальную плоскость P (на самом деле в трехмерном пространстве уравнения (1) определяют эту самую плоскость), то эта плоскость пересечет поверхность-график функции $z = f(x, y)$ вдоль

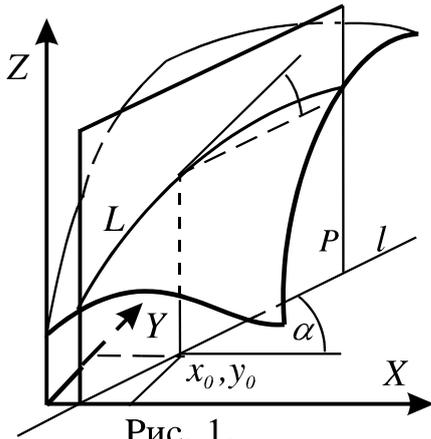


Рис. 1.

некоторой пространственной кривой L . Тангенс угла между горизонтальной плоскостью и касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен производной функции в этой точке по направлению l .

В любом курсе математического анализа доказывается, что производная по направлению, определяемая формулой (2), может быть представлена в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \alpha.$$

Заметим, что частная производная по x тоже является производной по направлению. Это направление определяется равенствами: $\cos \alpha = 1$; $\sin \alpha = 0$. Аналогично частная производная по y — это производная по направлению, которое можно задать условиями $\cos \alpha = 0$; $\sin \alpha = 1$.

Прежде, чем анализировать формулу (3), приведем некоторые понятия и факты из курса векторной алгебры. Пусть в плоскости с системой координат XOY задан направленный отрезок \vec{r} или (что то же самое) вектор, причем точка $M_0(x_0, y_0)$ является его начальной точкой, а $M_1(x_1, y_1)$ — конечной точкой. Определим координату вектора по оси OX как число, равное $x_1 - x_0$, а координату по оси OY , как число, равное $y_1 - y_0$. Если задать упорядоченную пару любых чисел a и b , то эти числа можно рассматривать как координаты некоторого вектора \vec{r} в плоскости XOY , причем длина этого вектора определена формулой

$$\rho = |\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а тангенс угла наклона γ вектора к оси OX определяется из формулы $\operatorname{tg} \gamma = b/a$ (отметим, что зная величину $\operatorname{tg} \gamma$, а также знак любого из чисел a и b , мы можем определить угол γ с точностью до 2π).

Представление вектора в виде пары его координат будем записывать в виде $\vec{r}(a; b)$ или $\vec{r} = \{a; b\}$. Такое представление имеет одну характерную особенность: оно **не определяет местоположение вектора на плоскости XOY** . Чтобы его определить, нужно наряду с координатами вектора задавать, например, координаты его начальной точки или, как её можно назвать, точки приложения вектора.

Если заданы два вектора: $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$ и $\bar{b} = \{b_1; b_2\}$, то **скалярным произведением** $\bar{a}\bar{b}$ этих векторов называется число $|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$ (φ - угол между векторами).

В любом курсе векторной алгебры доказывается, что скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$ и $\bar{b} = \{b_1; b_2\}$ равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2. \quad (4)$$

Пусть в некоторой области G плоскости XOY задана функция $z = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные по обоим аргументам. Градиентом или вектором-градиентом $\overline{grad}f(x, y)$ функции $f(x, y)$ в точке $(x, y) \in G$ называется вектор, который задается формулой

$$\overline{grad}f(x, y) = \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\}.$$

Функция f определяет для каждой точки области G вектор-градиент, исходящий из этой точки.

Возвратимся теперь к формуле (3). Ее правую часть мы можем рассматривать, как скалярное произведение векторов. Первый из них - вектор-градиент функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\overline{grad}f(x_0, y_0) = \left\{ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right\}.$$

Второй – вектор $\bar{e} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$. Это вектор, имеющий длину 1 и угол наклона к оси OX , равный α .

Теперь можно сделать вывод, что производная функции $z = f(x, y)$ по направлению, определяемому углом α наклона к оси OX , в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = |\overline{grad}f(x_0; y_0)| \cos\beta. \quad (5)$$

Здесь β - угол между вектором $\overline{grad}f(x_0, y_0)$ и вектором \bar{e} , задающим направление, по которому берется производная. Здесь также учтено, что $|\bar{e}| = 1$.

Из формулы (5) можно сделать очень важное заключение: **производная по направлению от функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ достигает наибольшего значения, если это направление совпадает с направлением вектора-градиента функции в рассматриваемой точке, так как $\cos\beta \leq 1$, и равенство**

достигается только если $\beta = 0$ (очевидно, что другие решения уравнения $\cos\beta = 1$ нас в данном случае не интересуют). Иначе можно сказать, что **вектор-градиент функции в точке направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в этой точке.**

Кроме того из формулы (5) следует, что наибольшее значение производной по направлению в точке или наибольшее значение скорости возрастания функции в точке равно длине вектора-градиента функции в этой точке.

Пример. Требуется найти производную функции $z = \frac{y}{y-x}$ по направлению, составляющему угол в 60° с осью OX , в точке $(1;3)$.

Найдем частные производные функции: $z'_x = \frac{y}{(y-x)^2}$; $z'_y = -\frac{x}{(y-x)^2}$ Теперь можно определить градиент функции в точке $(1;3)$: $\overline{grad}z(1;3) = \left\{ \frac{3}{4}; -\frac{1}{4} \right\}$.

Принимая во внимание равенство $\bar{e} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$, воспользуемся формулой (4):

$$\frac{\partial z(1;3)}{\partial l} = \frac{3 - \sqrt{3}}{8}.$$