Глава 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, и в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если производные, входящие в уравнение, берутся только по одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если в уравнении встречаются производные по нескольким переменным, то уравнение называется **уравнением в частных производных**. Мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Начнем с дифференциальных уравнений **первого порядка**. Это уравнения, в которые входит лишь первая производная неизвестной функции. Это уравнение может быть записано в виде

$$F(x,y,y') = 0. \qquad (1)$$

Здесь x - независимая переменная, y - её неизвестная функция, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ - производная функции y, F - заданная функция трех переменных. Функция F может быть задана не для всех значений её аргументов, поэтому можно говорить об области B определения функции F координатного пространства, то есть о множестве точек координатного пространства трех переменных x,y,y'.

Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y' - x^4 = 0; \qquad x\sin y' - \ln y = 0; \qquad x\cos y + (y' - y^2)\sin x = 0.$$

Решением уравнения (1) называется такая функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором промежутке (x_1, x_2), что при подстановке её вместо y в уравнение (1) получается верное равенство на всем промежутке (x_1, x_2). Очевидно, что подстановка $y = \varphi(x)$ возможна только тогда, когда функция $\varphi(x)$ на промежутке (x_1, x_2) имеет первую производную. Необходимо также, чтобы при любом значении переменной x из промежутка (x_1, x_2) точка с координатами x, y, y' принадлежала множеству B, на котором определена функция F. Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется его **общим решением**.

В некоторых случаях уравнение (1) определяет переменную y' как функцию независимых переменных x и y:

$$y' = f(x,y). \qquad (2)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) равносильно дифференциальному уравнению (1) и называется **разрешенным относительно производной**.

Рассмотрим свойства решений уравнения (2). Введем в рассмотрение координатную плоскость XY переменных x и y. Мы будем рассматривать лишь такие уравнения, у которых **область определения правой части есть некоторая открытая область** G **в плоскости** XY (область называется открытой, если каждая точка входит в неё вместе с некоторой своей окрестностью). Пусть функция $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (2). Тогда график этой функции называется **интегральной линией** или **интегральной кривой**. Эта кривая лежит в области G. Если точка (x_0, y_0) принадлежит области G, то интегральная кривая проходит через эту точку. Интегральная кривая в рассматриваемой точке имеет касательную, угловой коэффициент которой равен

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$$

Таким образом, в каждой точке области G можно установить положение касательной к графику решения уравнения (2), проходящему через эту точку.

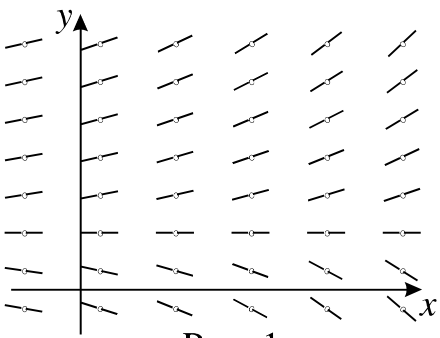


Рис. 1

Можно себе представить, что в каждой точке области G построен короткий отрезок касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Тогда получится чертеж, который называется **полем направлений**, задаваемым уравнением (2). Пример приведен на рисунке 1. Таким образом, каждое дифференциальное уравнение вида (2) задает на плоскости XY в области G поле направлений. Интегральные линии этого уравнения касаются направления, задаваемого полем в этой точке.

§2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если в уравнении

$$y' = f(x,y). \tag{1}$$

$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, то такое уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**. Его общий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y).$$

Предполагая, что $f_2(y) \neq 0$, преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

В обеих частях полученного уравнения стоят дифференциалы некоторых функций аргумента x. Из равенства дифференциалов этих функций следует, что сами функции отличаются одна от другой на константу.

Применим изложенный метод к задаче об эффективности рекламы.

Пусть торговой фирмой реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени $t = 0$ из рекламы получили информацию x_0 человек из общего числа N потенциальных покупателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей, и в момент времени $t > 0$ число знающих о продукции людей равно $x(t)$. Сделаем предположение, что скорость роста числа знающих о продукции пропорциональна как числу осведомлённых в данный момент покупателей, так и числу неосведомленных покупателей. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Здесь k – положительный коэффициент пропорциональности. Из уравнения получаем равенство дифференциалов двух функций аргумента t:

$$\frac{dx}{x(N - x)} = kdt.$$

Интегрируя левую и правую части, находим общее решение дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N - x} = kt + C.$$

В общее решение входит неопределенная константа C. Полагая $NC = D$, получим равенство:

$$x/(N - x) = e^{Nkt + D},$$

из которого определим функцию $x(t)$:

$$x = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}.$$

Здесь $E = e^{-D}$. Такого вида функция называется логистической, а её график – логистической кривой.

Если теперь учесть, что $x(0) = x_0$ и положить $x_0 = N/\alpha$, где $\alpha > 0$, то можно найти значение константы E. Логистическая функция примет вид:

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)e^{-Nkt}}.$$

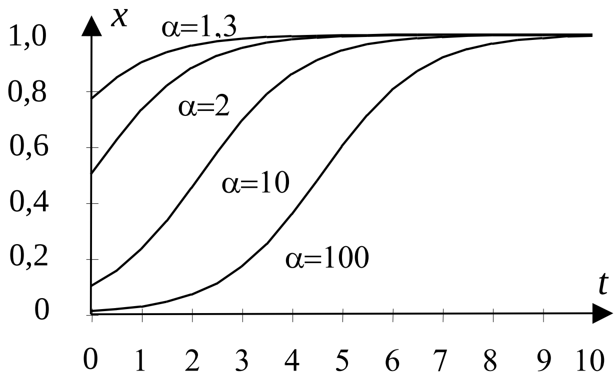


Рис.2

На рисунке 2 приведены примеры логистических кривых, полученных при различных значениях α. Здесь величина N условно принималась за 1, а величина k бралась равной 0,5.

С помощью логистической функции описываются многие экономические, социальные, технологические и биологические процессы, например, постоянный рост продаж, распространение слухов, распространение технических новшеств, рост популяции определенного вида животных и др.

§3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = B(x). \qquad (1)$$

При $a_0 \neq 0$ его можно представить в виде:

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad (2)$$

где $a(x) = a_1(x)/a_0(x)$ и $b(x) = B(x)/a_0(x)$.

Если правые части (1) и (2) равны нулю, то эти уравнения называются **однородными**, в противном случае – **неоднородными**.

Если в уравнении (1) $a_0(x) = a_0$ и $a_1(x) = a_1$, то есть эти функции являются константами, то уравнение (1) называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородное уравнение

$$y' + ay = 0. \qquad (3)$$

Перепишем его в виде: $\frac{dy}{dx} = -ay$ или $\frac{dy}{y} = -adx$. **Последнюю формулу можно рассматривать как равенство дифференциалов функций одного и того же аргумента** x. Интегрируя это равенство, получаем $\ln y = -ax + C$, или $y = e^{-ax + C}$, где C - произвольная константа. Если теперь ввести обозначение $e^C = A$, то можно представить так называемое **общее решение** уравнения (3) в виде:

$$y = Ae^{-ax}. \qquad (4)$$

Это решение зависит от неопределенной константы A, придавая которой различные значения, можно получить все множество интегральных кривых уравнения (3). Если мы хотим найти интегральную кривую, проходящую через точку (x_1, y_1), то нужно подставить координаты точки в формулу (4) и определить значение константы A. С этим значением константы A формула (4) будет определять лишь одну интегральную кривую или так называемое **частное решение** уравнения (3).

Как правило, задача ставится так: найти решение уравнения (3) при условии

$$y(0) = y_0. \qquad (5)$$

Последняя формула называется **начальным условием** для уравнения (3).

Дифференциальное уравнение (3) при начальном условии (5) имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$y(x) = y_0 e^{-ax}. \qquad (6)$$

Заметим, что для задания начального условия, вообще говоря, не обязательно выбирать значение аргумента x, равное нулю. Как сказано выше, выделить единственное решение из множества, задаваемого формулой (4) (то есть определить константу A), можно с помощью любого соотношения $y(x_1) = y_1$, считая его начальным условием.

Если в уравнении (3) $a = 0$, то интегрирование приводит к решению $y(x) = C$, то есть к константе, которая при начальном условии (5) равна y_0. Таким образом решение $y(x)$ сохраняет начальное значение y_0 при изменении x.

Рассмотрим теперь случай неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть дано уравнение

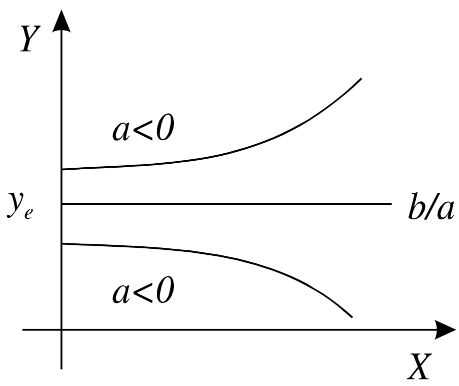
$$y' + ay = b, \qquad (b = cost) \tag{7}$$

с начальным условием $y(0) = y_0$.

Введем новую неизвестную $z = y - \frac{b}{a}$ (считаем, что $a \neq 0$). Теперь уравнение (7) примет вид $z' + a\left(z + \frac{b}{a}\right) = b$ или $z' + az = 0$. Как было показано выше, решением последнего уравнения является функция $z = z_0 e^{-ax}$, где $z_0 = y_0 - \frac{b}{a}$. Возвращаясь к изначальной неизвестной, получаем решение уравнения (7) при заданном начальном условии:

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad (a \neq 0). \tag{8}$$

Если в уравнении (7) $a = 0$, то его решением при заданном начальном условии будет функция $y(x) = bx + y_0$.



.Рис.1.
Случай неустойчивого решения.

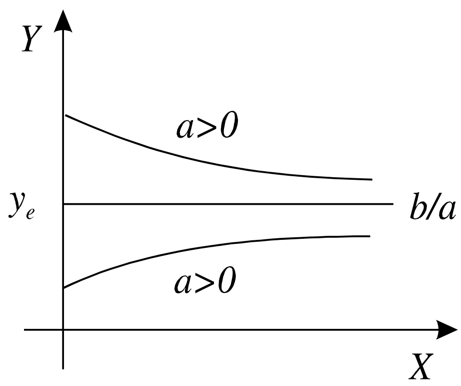


Рис.2.
Устойчивое решение.

Заметим, что решение (8) состоит из двух частей: $y_h = Ae^{-ax}$ - решения однородного уравнения $y' + ay = 0$ и $y_0(x) = b / a$ - решения, которое назовем равновесным и которое получается, если в уравнении (7) положить $y' = 0$. Такое представление позволяет рассматривать решение (8) уравнения (7) как сумму равновесного или фиксированного значения y_e и отклонения или девиации y_h траектории $y(x)$ от равновесного значения. Это отклонение возрастает экспоненциально с ростом x при $a < 0$ и стремится к нулю при $a > 0$. В первом случае ($a < 0$) решение называется **неустойчивым**, а во втором – **устойчивым** (асимптотически устойчивым).

Как показано на рисунках 1 и 2, отклонение $y_h = (y_0 - y_e)e^{-ax}$ от уровня равновесия $\dfrac{b}{a}$ уменьшается с ростом x при $a > 0$ и увеличивается с ростом x при $a < 0$.

В качестве примера рассмотрим динамическую модель Вальраса устойчивости рынка. Она формулируется следующим образом. Имеется несколько продавцов и несколько покупателей некоторого товара. Некий посредник объявляет цену p на товар, после чего каждый продавец сообщает, сколько товара он может продать при такой цене. Суммарное количество товара, выставляемое на
продажу при данной цене, называется **предложением** и будет обозначаться $S(p)$. Также каждый покупатель сообщает, сколько товара он собирается купить при данной цене. Сумма потребностей покупателей в дальнейшем будет называться **спросом** и обозначаться $D(p)$. Введем понятие **избыточного спроса** $E(p)$ как разности между спросом и предложением: $E(p) = D(p) - S(p)$. Если $E(p) \geq 0$, цена растет до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие, которое определяется равенством спроса и предложения, то есть равенством $D(p) = S(p)$ или $E(p) = 0$. Если $E(p) \leq 0$, то есть имеет место **избыточное предложение**, происходит снижение цены, пока не наступит равновесие. Здесь уместно сделать самое простое возможное предположение, заключающееся в том, что **скорость изменения цены во времени пропорциональна избыточному спросу**: малый избыточный спрос вызовет медленное увеличение цены товара, большой избыточный спрос – быстрое увеличение цены, малое избыточное предложение – медленное понижение цены и т. д. Отсюда следует уравнение

$$\frac{dp}{dt} = kE(p).$$

Здесь k - положительная константа, отражающая скорость процесса.

Пусть спрос и предложение являются линейными функциями цены: $D(p) = \alpha + \beta p$ и $S(p) = \gamma + \delta p$. Тогда, приняв начальное условие $p(0) = p_0$, будем иметь уравнение

$$p'(t) = k(\alpha + \beta p - \gamma - \delta p) = k(\beta - \delta)p + k(\alpha - \gamma).$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, которое, как было показано выше, имеет решение

$$p(t) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} + \left(p_0 - \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} \right) e^{k(\beta - \delta)t},$$

которое устойчиво, если $\beta - \delta < 0$ и неустойчиво при $\beta - \delta > 0$. Но β - тангенс угла наклона кривой спроса, а δ - тангенс угла наклона кривой предложения, и если выполняется условие $\beta - \delta < 0$ (которое верно при убывании спроса и возрастании предложения с ростом цены), рынок устойчив, то есть избыточный спрос снижается и окончательно устраняется возрастающей ценой. Если $\beta - \delta > 0$, рынок неустойчив: будет иметь место непрерывная и неограниченная инфляция.

Рассмотрим теперь **линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами**. Выпишем такое уравнение в общем виде:

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{9}$$

Здесь $a(x)$ - некоторая функция аргумента x. Как мы это делали раньше, вначале будем искать решение однородного уравнения, положив функцию $b(x)$ в правой части (9) равной нулю. Представив уравнение $y' + a(x)y = 0$ в виде

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

после интегрирования получаем

$$\ln y + C = -\int a(x)dx$$

или

$$y(x) = e^{-C} e^{-\int a(x)dx} = Ae^{-\int a(x)dx}. \tag{10}$$

Здесь A - неопределенная константа, которую можно найти из начального условия $y(0) = 0$.

Пример. Решить уравнение $y' + 2xy = 0$ при начальном условии $y(0) = 3$.

В этом случае

$$a(x) = 2x, \qquad e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$$

и начальное условие определяет $A = 3$. Искомое решение имеет вид

$$y(x) = 3e^{-x^2}.$$

Перейдем к решению неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Положим в формуле (10) $A = A(x)$, то есть будем считать множитель A некоторой функцией от x. Этот метод называется **методом вариации произвольной постоянной**, и с его помощью мы попытаемся решить уравнение (9) при условии, что $b(x)$ есть некоторая функция, не равная тождественно нулю. Из формулы (10) получаем:

$$y(x)=A(x)e^{-\int a(x)dx};\quad y'(x)=A'(x)e^{-\int a(x)dx}-A(x)e^{-\int a(x)dx}a(x).$$

После подстановки этих выражений уравнение (9) принимает вид

$$A'(x)e^{-\int a(x)dx}-A(x)e^{-\int a(x)dx}a(x)+a(x)A(x)e^{-\int a(x)dx}=b(x),$$

откуда следует уравнение относительно функции $A(x)$:

$$A'(x)=b(x)e^{\int a(x)dx},$$

с решением

$$A(x)=\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx.$$

Подставив это выражение в (10), получим общее решение уравнения (9):

$$y(x)=e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx. \tag{11}$$

Пример. Решить уравнение $y'+\frac{1}{x}y=x$ при начальном условии $y(1)=2$. (Заметим, что в данном случае нельзя задавать начальное условие при $x=0$, так как это значение не принадлежит области B определения функции F (см. формулу (1) из §1).)

Для решения поставленной задачи можно было бы воспользоваться формулой (11), но мы пойдем другим путем: применим метод решения уравнений, которым была получена формула (11).

В нашем уравнении $a(x)=\frac{1}{x};b(x)=x$. Решение однородного уравнения $y'+\frac{1}{x}y=0$ получается из формулы (10):

$$y=Ae^{-\ln x}=\frac{A}{x}. \tag{12}$$

Реализуем теперь вариацию произвольной константы A, считая, что $A=A(x)$ есть некоторая функция аргумента x. Тогда $y'=\frac{xA'(x)-A(x)}{x^2}$, и подставив это выражение вместе с приведенным выше выражением для y в исходное уравнение, получим:

$$\frac{xA'(x)-A(x)}{x^2}+\frac{A(x)}{x^2}=x,$$

откуда следует, что $A'(x) = x^2$ или $A(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Если теперь подставить это в формулу (12), то получится общее решение исходного уравнения: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$. С помощью начального условия найдем значение неопределенной константы C и выпишем решение поставленной задачи: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x}$.

Упражнения

1. Решить дифференциальные уравнения

1) $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$;

2) $xy' - y = y^3$;

3) $xyy' = 1 - x^2$;

4) $y - xy' = a(1 + x^2 y')$;

5) $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x)\sec^2 y dy = 0$;

6) $y' \operatorname{tg} x = y$;

7) $y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$;

8) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$;

9) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$;

10) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$.

11) $(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy\right)dy$;

12) $y' = 10^{x+y}$;

13) $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$;

14) $y' + \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0$;

15) $y' + 2y = 4x$;

16) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;